

中学校 数学

図形の論証指導において、
筋道を立てて考える能力の育成を目指した指導法の研究
－合同の証明における「総合的思考」と「分析的思考」の両方の指導を通して－

佐井村立佐井中学校 教諭 川 下 美由樹

要 旨

本研究では、図形の論証指導において、筋道を立てて考える能力の育成のために、仮定から結論を考えていく「総合的思考」と、結論から考えていく「分析的思考」の両方を指導した。

その結果、「総合的思考」と「分析的思考」を適宜用いることができるようになり、証明に必要な根拠となる事柄を見付け、筋道を立てて考えることができるようになった。

キーワード：中学校 数学 総合的思考 分析的思考 証明の考え方 証明の書き方

I 主題設定の理由

幼稚園、小学校、中学校、高等学校、及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（中央教育審議会答申 平成20年1月）の中で、改善の基本方針として、「根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えることや、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実する」と示されている。つまり、図形の領域では、図形の性質や関係について見通しをもって考え、それが成り立つことを、根拠を明らかにして筋道を立てて正しい推論ができるようにしていくことが求められていると言える。

そこで、図形の論証指導を通して、筋道を立てて考える能力を育成するための指導として、分かっていることを基に「それからどんなことが言えるか」というように、仮定から結論を考えていく一般的な考え方の「総合的思考」のほかに、「結論を導くためには何が言えればよいか」というように、結論から考えていく「分析的思考」の両方を指導していくことを考えた。

これまでの、自分自身の図形の論証指導を振り返ってみると、「総合的思考」を用いて教師主導で記述させる指導が中心で、見通しをもって考えさせたり自分の考えを整理させたりするなど、筋道を立てて考えさせるための指導は十分ではなかった。また、テスト等の記述から、証明に必要な根拠となる事柄を見付け、それを基にして証明の構想を練ることができず、図形に成り立つ性質を論証することを苦手と感じている生徒が多いことが分かった。さらに、教科書には、「分析的思考」の課題等が少なかったことも一因としてあるのではないかと考えた。「総合的思考」と「分析的思考」の両方を指導することで、問題に合った思考を用いて証明に必要な根拠となる事柄を見付けることにつながり、それによって、根拠を明らかにして筋道を立てて考える能力が育成されるのではないかと考え、本主題を設定した。

II 研究目標

図形の論証指導において、「総合的思考」と「分析的思考」の両方を指導することで、問題に合った思考を用いて証明に必要な根拠となる事柄を見付けることができるようになり、筋道を立てて考える力が育成されることを実践を通して明らかにしていく。

III 研究仮説

図形の論証指導において、「総合的思考」と「分析的思考」の両方を指導することで、問題に合った思考を用いて証明に必要な根拠となる事柄を見付けることができるようになり、筋道を立てて考える力が育つで

あろう。

IV 研究の実際とその考察

1 研究における基本的な考え方

(1) 筋道を立てて考える能力の育成について

中学校学習指導要領解説数学編（平成20年9月）には、「数学的な推論には、主なものとして帰納、類推、演繹があり、それらは数や図形の性質などを見いだしたり、数学を利用したり、数学的に説明し伝え合ったりする際に重要なはたらきをする」と示されている。また、「筋道を立てて考える」とは、見通しを基に根拠を明らかにしながら自分の考えを整理し、考えを進めることである。そして、中学校の図形の領域では、図形の性質や関係がいつでも正しいということを証明するために、すでに分かっていることを基にして、その正しいことを説明しようとする演繹的な考え方が中心となる。

そこで、合同の証明において、演繹的に考えるときに用いられる「総合的思考」と「分析的思考」の両方を指導することで、見通しをもって証明に必要な根拠となる事柄を見付け、その見付けた事柄を整理することで、筋道を立てて考える能力を高めることができると考えた。

(2) 「総合的思考」と「分析的思考」について

片桐は、演繹的に考えるときに用いられる総合的思考と分析的思考について、

ア 総合的思考・・・「分かっていることを基に、それからどんなことが言えるか」と仮定から結論を考えていく

イ 分析的思考・・・「そのことが言えるには、何が言えればよいのか」というように結論から仮定を考えていく

と示している（片桐重男，2004）。

この二つの思考が、三角形の合同の証明にどのように用いられるかを図1に示す。

まず、総合的思考は、すでに等しいと分かっている仮定とそれ以外に成り立つ事柄（等しい辺又は角等）を見付けることから始まる。それによって成り立つ合同条件が決まり、二つの三角形が合同であることが示され、結論が導かれていくという考え方である。すなわち、与えられた仮定と成り立つ事柄から三角形の合同を証明し、結論を導くという方法である。

次に、分析的思考は、結論を導くために、結論を含む合同と予想する二つの三角形について考えることから始まる。そして、その二つの三角形の辺又は角に対して成り立つ事柄（仮定を含む）を見付け、その見付けた事柄

によって合同条件が決まり、二つの三角形が合同であることが示され、結論が導かれるという考え方である。すなわち、結論を示すためには、どの三角形の合同を証明すればよいのかを考える方法である。図形の論証指導において、この二通りの思考を用いることが有効ではないかと考えた。

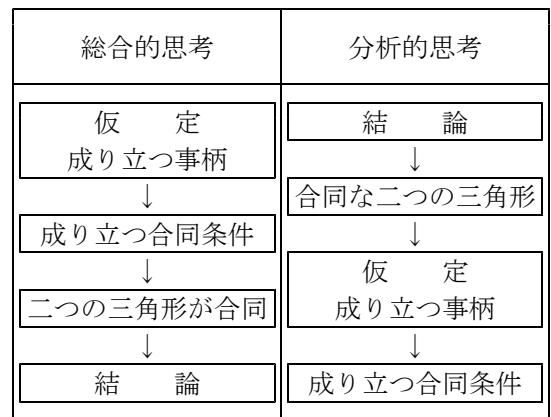


図1 総合的思考と分析的思考のイメージ図

2 研究内容

(1) 各教科書の「平行と合同」における「分析的思考」の課題等に関する調査

平成21年度の全国学力・学習状況調査報告書の中に、「証明の学習においては、結論から仮定、仮定から結論の両方向から考えて、証明の方針を立て口述したり記述したりすることが大切である」と記されていることから、証明の学習に二通りの思考を用いることが大切であることが分かる。しかし、教科書では総合的思考を用いた内容が多く、指導においても、総合的思考を用いることが多い。

そこで、各教科書会社の「平行と合同」の単元における分析的思考の課題等を調査してみると、表1のような結果となった。6社のうち5社に関しては、平成24年度版になっても分析的思考の課題等

表1 分析的思考の課題等の数

	平成23年度版	平成24年度版
A社	2	2
B社	1	1
C社	2	2
D社	3	3
E社	4	4
F社	0	4

を継続して取り扱っており、証明の学習に二通りの思考を用いていることが分かった。

一方、F社の教科書では、平成23年度版までは取り扱うことがなかった分析的思考の課題等を、平成24年度版で取り扱うようになり、これで、全ての教科書に分析的思考が取り扱われるようになった。

(2) 「証明の書き方」と「証明の考え方」を取り入れたワークシートの使用

説明することに自信がなく、根拠となる事柄を見付けることや、それを基にして証明の構想を練ることを苦手と感じている生徒にとって、いきなり証明を記述することは難しいのではないかと考えた。

そこで、総合的思考と分析的思考のどちらを用いる場合においても、図2のワークシートのように、まずは証明の基となる「証明の考え方」を記述させてから、正しい証明の記述の仕方となる「証明の書き方」を記述させるという順序で指導することとした。この方法で証明の指導を行うことが生徒にとって証明の構想を練ることに役立ち、筋道を立てて考えるために有効だと考えた。

<p>【証明の書き方】</p> <p>$\triangle ACB \cong \triangle ADB$ に $\times 12$ 仮定より $AC = AD$ (1) $BC = BD$ (2) 共通の辺より $AB = AB$ (3) ①・②・③より 3組の辺の長さがそれぞれ等しい $\triangle ACB \cong \triangle ADB$ 合同より角の対応より ④ $\angle C = \angle D$</p>	<p>【証明の考え方】</p> <p>$\angle C = \angle D$ ↓ $\triangle ACB \cong \triangle ADB$ ↓ $AC = AD$ (仮定より) $BC = BD$ () $AB = AB$ (共通の辺) ↓ 3組の辺の長さがそれぞれ等しい $\triangle ACB \cong \triangle ADB$ ↓ $\angle C = \angle D$</p>
--	---

図2 使用したワークシート

(3) 「総合的思考」と「分析的思考」を指導する単元構成について

ア 第1時、第2時：記述の順序と同じ「総合的思考」の指導

証明の導入として、第1時と第2時では、仮定や等しい辺、角、三角形の合同条件を基にして合同であることを示し、結論を導いていく総合的思考を指導する。その理由として、総合的思考の考えの順序が証明の記述の順序と同じになるため、ワークシートを用いて「証明の考え方」を記述させることが、「証明の書き方」を記述させることにつながると考えた。

イ 第3時、第4時：見通しをもって証明を進めることができる「分析的思考」の指導

第3時と第4時では、結論が成り立つことを証明するために、分析的思考を指導する。分析的思考では、初めに結論に着目し、証明に必要な根拠となる事柄を見付けるため、生徒が見通しをもって進めることができる。その際、分析的思考の考える順序と証明の記述の順序が異なるため、「証明の考え方」を基にして「証明の書き方」を完成させる際に配慮が必要になる。

ウ 第5時、事後調査：問題に合った思考を用いた合同の証明

第1時から第4時で二通りの思考を学習した後、第5時と事後調査では、問題に合った思考を用いて証明させることにする。過去に全国学力・学習状況調査問題として出題された問題や、第1時と第2時の総合的思考のみで証明した問題を扱い、二通りの思考のどちらを用いて証明するか、そして、全国正答率との比較、第1時、第2時における正答率との比較をする。

3 検証方法

- (1) 確認問題での「成り立つ事柄を見付けること」と「結論を導くこと」に対する記述
- (2) 総合的思考と分析的思考を用いた人数の比較
- (3) 事前・事後による意識調査

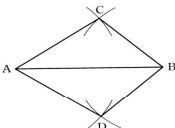
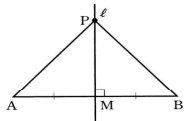
4 授業の実際と考察

(1) 「総合的思考」と「分析的思考」のそれぞれを用いた展開例と教師の発問順

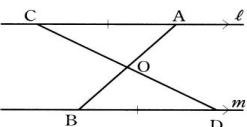
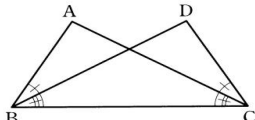
総合的思考を指導した例題における教師の発問順	分析的思考を指導した例題における教師の発問順
<p>1. この図の中で分かっている等しい辺や角はどれですか。また、それはなぜですか。</p> <p>2. このことからどの合同条件が成り立ちますか。</p> <p>3. これにより、どの二つの三角形が合同であると言えますか。</p> <p>4. 二つの三角形が合同だと、対応する辺や角についてどんなことが言えますか。</p>	<p>1. 証明する事柄（結論）は何ですか。</p> <p>2. 結論が言えるためには、どの二つの三角形が合同であることを示せばよいですか。</p> <p>3. 二つの三角形において、等しい辺や角はどれですか。また、それはなぜですか。</p> <p>4. このことからどの合同条件が成り立ちますか。</p> <p>5. これで、初めの二つの三角形がどんな関係だと分かりましたか。</p> <p>6. 二つの三角形が合同だと示されたことで、何が言えますか。</p>

(2) 検証で取り扱う証明問題と用いた思考について

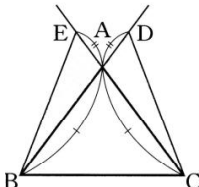
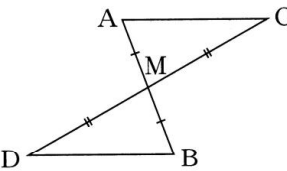
ア 第1時, 第2時: 「総合的思考」を用いた合同の証明

第1時 確認問題 (事後調査問題)	第2時 確認問題 (事後調査問題)
$AC=AD, BC=BD$ ならば, $\angle ACB=\angle ADB$ であることを証明しなさい。 	$AM=BM, \angle AMP=\angle BMP=90^\circ$ ならば, $AP=BP$ であることを証明しなさい。 

イ 第3時, 第4時: 「分析的思考」を用いた合同の証明

第3時 確認問題	第4時 確認問題
$l//m, AC=BD$ ならば, $AO=BO$ であることを証明しなさい。 	$\angle ABC=\angle DCB, \angle ACB=\angle DBC$ ならば, $AB=DC$ であることを証明しなさい。 

ウ 第5時, 事後調査: 「総合的思考」と「分析的思考」のどちらかを用いた合同の証明

第5時 確認問題 1	第5時 確認問題 2
☆平成22年度 全国学力・学習状況調査問題 $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC に $AD=AE$ となる点 D, E をそれぞれとる。このとき, $BE=CD$ となることを証明しなさい。 全国正答率48.2% 	☆平成21年度 全国学力・学習状況調査問題 線分 AB と線分 CD がそれぞれの中点 M で交わっている。このとき $AC//DB$ となることを証明しなさい。 全国正答率41.8% 

(3) 確認問題における検証結果

ア 「総合的思考」と「分析的思考」のそれぞれを用いた合同の証明

それぞれの確認問題に対して, 「成り立つ事柄を見付けることができたか」と「結論を導くことができたか」という観点で検証することとした。そして, 「どちらもできた」「成り立つ事柄だけ見付けることができた」「どちらもできなかつた」に対する人数と, 確認問題における正答率の結果を, それぞれの表に示している。

表2 総合的思考で解いた結果

事柄	結論	第1時	第2時
○	○	8名	10名
○	×	0名	2名
×	×	5名	1名
正答率		61.5%	76.9%

表3 分析的思考で解いた結果

事柄	結論	第3時	第4時
○	○	7名	11名
○	×	0名	2名
×	×	7名	1名
正答率		50.0%	78.6%

第1時の確認問題では, 角に着目してしまったため, 正しい根拠を見付けることができず, 正答率も低くなった。しかし, 第2時の確認問題では, 「共通な辺」という根拠を正しく見付けることができ, 表2の結果に示してあるように正答率も上がった。

分析的思考では, 初めに結論に着目するため, 生徒も見通しをもって取り組むことができていた。第3時の確認問題では, 「平行線の錯角の性質」や「対頂角の性質」という根拠を見つけたまではよかったが, 合同条件に合うように正しく選択できた生徒が少なかったため, 半数の生徒が不正解となった。

逆に, 第4時の確認問題では, 合同となる二つの三角形に着目しながら証明を進め, 「共通な辺」の対応順も間違えずに記述できた生徒が増えたため, 表3に示してあるように正答率も上がった。

イ 「総合的思考」と「分析的思考」のどちらかを用いた合同の証明

第1時と第2時では総合的思考のみ

表4 事後調査問題での正答率の比較

を用いて解いた問題を, 事後調査問題としてどちらの思考を用いて解いてもよいこととして検証した。その結果, 表4に示すように, 総合的思考を用いた人数と分析的思考を用いた人数がちょうど半数となり正答率も上がった。

事柄	結論	第1時確認問題			第2時確認問題		
		総合的	分析的	合計	総合的	分析的	合計
○	○	6名	7名	13名	6名	6名	12名
○	×	0名	0名	0名	0名	1名	1名
×	×	1名	0名	1名	1名	0名	1名
事後正答率		92.9%			85.7%		
総合的思考時		61.5%			76.9%		

このことから, 一度解いた問題に対しても, 自分に合った思考や問題に合

った思考を用いることで証明に必要な根拠となる事柄を見付けることができるようになり、そのことが、図形の証明問題に対して筋道立てて考える力を高めることにつながったと言える。

第5時では、平成22年度と平成21年度の全国学力・学習状況調査に実際に

出題された問題で検証した。平成22年度の問題では、本来、 $\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ に網かけがされており、初めから二つの三角形が与えられていて、分析的思考を用いて解く傾向の問題である。しかし、網かけを消した図を用いた結果、総合的思考で考えていた生徒が、二つの仮定から $DB = EC$ が成り立つことに気付き、 $\triangle DBC$ と $\triangle ECB$ の合同を証明した。

平成21年度の問題では、見た目から辺 AC と辺 BD を平行と判断し、根拠として「平行線の錯角の性質」を取り上げてしまう生徒が見られた。表5に示すように、どちらの問題も、14名中8名が総合的思考を、6名が分析的思考を用いて解いている。生徒は、自分に合った思考や問題に合った思考を用いて成り立つ事柄を見付け、それぞれの方法で結論が成り立つことを証明しようとしていることが分かる。

ウ 「証明の考え方」と「証明の書き方」の記述

どちらの思考を用いる場合でも、まずは記述の基となる「証明の考え方」を記述させてから、次に「証明の書き方」を記述させる順序で指導した。図3に示したように、「仮定を含む成り立つ事柄」、「合同条件」、「結論」を、矢印を用いて順序立てて記述し、それを基に「証明の書き方」を記述しているため、「証明の考え方」を記述する段階が、すでに筋道を立てて考える能力の育成に役立っているということが分かった。このことから、図形の論証指導では、まずは記述の基となる「証明の考え方」を記述させ、それから「証明の書き方」を記述させる順序で指導することが有効であると言える。

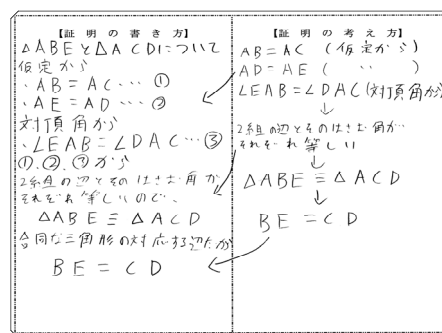


図3 「証明の考え方」から「証明の書き方」を完成させた記述

(4) 「分析的思考」に対する意識調査

生徒に分析的思考に対する意識調査を行ったところ、表6のような結果となった。第5時の確認問題や事後調査問題では総合的思考を用いて解いた生徒も、結論から考え、結論を含む二つの三角形に着目しながら筋道立てて考えていく分析的思考が役に立ったと感じていることが分かった。生徒の感想からも「二通りのやり方を学習したことで、多様な見方で解決できるようになった」

表6 分析的思考に対する意識調査

役に立った	4名
どちらかといえば役に立った	10名
あまり役に立たなかった	0名
役に立たなかった	0名

や「結論から考えていくやり方が自分には合っている」という感想が出てきた。また、「問題によって使い分けていきたい」と答えた生徒は、確認問題は総合的思考を用いて証明を行い、事後調査問題に対しては分析的思考を用いて証明を行った。そして、どちらの問題に対しても、筋道立てて結論まで導くことができた。その反面、「役には立ったけど、二通りのやり方があると面倒だから、どちらか一つにしぼってほしかった」という意見があり、実際にその生徒は、初めに学習した総合的思考の考え方のみを用いて証明を行っていた。二通りの思考を指導することが筋道を立てて考える能力の育成につながると考えていたが、逆に混乱させる要因にもなりうると感じた。

(5) 生徒の証明することに対する意識調査

図形の証明を行うまでは、数の性質について成り立つことを、文字を用いて説明する問題を学習したが、分析的思考を指導する場面を設定しなかったので見通しをもって進めることができなかつた。しかし、総合的思考と分析的思考の両方を学習したことで、問題に合わせて思考を使い分けることが可能となった。さらに、自分に合った思考を用いることが見通しをもって推論を進めることにつながり、図4に示すように、証明することに対して自信をもって取り組めるように

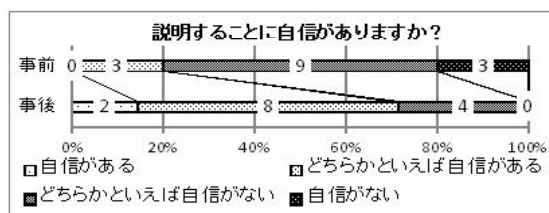


図4 証明することに対する意識調査

証明することに対して自信をもって取り組めるように

なったと言える。

V 研究のまとめ

1 「総合的思考」と「分析的思考」の両方を指導したこと

- ・二通りの思考を学習したことで、自分に合った思考や問題に合った思考を用いて証明問題を解くことができ、証明に必要な根拠となる事柄を見付けやすくなったと感じた生徒が増えた。
- ・総合的思考を用いて、証明に必要な根拠となる事柄を見付けることができなかつた生徒が、分析的思考を用いたことで、見通しをもって証明を進めることができ、証明に必要な根拠となる事柄を見付けることができた。
- ・分析的思考を学習したことが役に立ったと感じた生徒が多く、二通りの思考を問題によって使い分けたり、自分に合った思考を用いたりすることができるようになった。

2 ワークシートを用いた「証明の考え方」と「証明の書き方」の記述

- ・図形の論証指導では、どちらの思考を用いる場合においても、証明の基となる「証明の考え方」に記述する段階が、根拠を明らかにしながら自分の考えを整理することに役立ち、筋道を立てて考える能力の育成につながる事が分かった。

3 生徒の証明に対する意識の向上

- ・根拠を基に説明することに対して「自信がない」と感じていた生徒が多かったが、二通りの思考を学習したことで見通しをもって考えることができるようになった。そのことが、証明に対して自信をもって取り組むことにもつながった。

VI 本研究における課題

- ・二通りの思考を学習し、どちらの思考も理解しているにも関わらず、どちらか一方の思考しか用いることができない生徒への指導
- ・二通りの思考を学習したことで混乱した生徒や、説明することに自信をもてない生徒への指導

<引用文献>

文部科学省 2008 『中学校学習指導要領解説 数学編(平成20年9月)』, p. 3, p. 29

片桐重男 2004 『新版 数学的な考え方とその指導 第1巻 数学的な考え方の具体化と指導』, p. 48, 明治図書

国立教育政策研究所 2010 『平成22年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』, p. 289

国立教育政策研究所 2009 『平成21年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』, p. 318, p. 323

<引用URL>

中央教育審議会 2008 「幼稚園、小学校、中学校、高等学校、及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について(答申)」

http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/_icsFiles/afieldfile/2009/05/12/1216828_1.pdf(2011. 5. 24)