

中学校 数学

関数の領域において、具体的な事象の中から関数関係を見いだす能力を高めるための指導法の研究
—表，式，グラフから具体的な事象に表現する活動を通して—

つがる市立稲垣中学校 教諭 加 福 一 生

要 旨

本研究では、関数の領域の学習において、具体的な事象の中から関数関係を見いだす能力を高めるために、一次関数の単元を通して、授業の中で表，式，グラフから具体的な事象に表現する活動を取り入れた。その結果、具体的な事象と表，式，グラフとの関連を双方向で捉えることができ、関数関係を見いだす能力を高めることができた。

キーワード：中学校 数学 関数関係 具体的な事象 見いだす能力

I 主題設定の理由

現行の中学校学習指導要領では、「数量関係」が確率・統計に関する領域の「資料の活用」の新設に伴って、「関数」と改められた。関数の領域は、身の回りの具体的な事象を考察したり理解したりするために必要な見方や考え方が多く、自然現象や社会現象の中には関数関係になっているものが数多くある。それらを考察する上でもいろいろな関数についての理解及び、それらの学習を通して養われる関数的な見方や考え方は、今後の学習や生活において重要な役割を果たすと考える。本校の生徒の実態を見ると、関数についての意味の理解不足から関数の領域を苦手とする生徒が多く、改善の必要性を感じていた。

そこで、各学年の関数の領域の目標に共通している「関数関係を見いだし表現し考察する能力」のうち、一番基礎となる「見いだす能力」を高めることにした。そのために具体的な事象を表，式，グラフに表現する学習に加えて、表，式，グラフから具体的な事象を表現する活動を、単元を通して繰り返し行うことにより、具体的な事象と表，式，グラフを双方向で捉えることができ、双方を関連付けやすくなり、さらに具体的な事象から関数関係を見いだす能力を高められると考え、本主題を設定した。

II 研究目標

関数領域において、具体的な事象の中から関数関係を見いだす能力を高めるために、単元を通して授業の中に表，式，グラフから具体的な事象に表現する活動を取り入れることが有効であることを、実践を通して明らかにする。

III 研究仮説

関数の領域において、単元を通して表，式，グラフから具体的な事象に表現する活動を取り入れることにより、表，式，グラフの特徴と具体的な事象との関係がつかみやすくなり、具体的な事象から関数関係を見いだす能力が高まるだろう。

IV 研究の実際とその考察

1 研究における基本的な考え方

(1) 具体的な事象の中から関数関係を見いだす能力とは

本研究では、具体的な事象から伴って変わる二つの数量を取り出し、その変化や対応の仕方を調べ、二つの数量の関係や特徴を読み取ることで関数関係を見つける力を、関数関係を見いだす能力と考えた。ま

た、中学校では式の形に着目して、関数関係が比例や反比例、一次関数であると判断したり、数理的に処理したりすることが必要となることから、関数関係を比例や反比例、一次関数の式で表せることも関数関係を見いだす能力の一つと考えた。

(2) 表、式、グラフから具体的な事象に表現する活動とは

図1に示す通り、一般的に関数の領域の授業の流れは、具体的な事象の中から伴って変わる二つの数量を取り出して、それらを表、式、グラフに表すことで関数関係を見だし処理し考察する。本研究では一般的な流れで授業を行うとともに、その流れとは逆に、関数関係にある表、式、グラフから具体的な事象に表現する活動も取り入れることにした。これまでの自身の授業を振り返ってみると、直接表から式やグラフに表すことや、式から表やグラフに表すような、具体的な事象から離れた授業が多かった。具体的な事象に表現する活動も取り入れることで、表、式、グラフと具体的な事象を双方向で捉えられることができ、表や式、グラフの特徴と具体的な事象との関係がつかみやすくなり関数関係を見いだす能力が高められる活動と考えた。

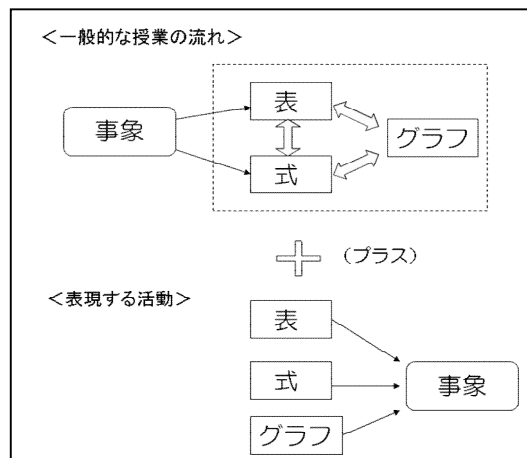


図1 具体的な事象に表現する活動

2 単元指導計画の工夫

具体的な事象に表現する活動を取り入れた一次関数の単元指導計画を表1に示す。

表1 具体的な事象に表現する活動を取り入れた一次関数の単元指導計画

項目	時間	学習内容	具体的な事象に表現する活動
一次関数と グラフ	1	比例と比較した一次関数 「事象→表→式」	★表→事象 A1 ★式→事象 B1
	2	一次関数の意味 「事象→表→式」	★表、式→事象 A2 ★式→事象 B2
	3	変化の割合の意味の理解	
	4	変化の割合が、一定ではない関数があることの理解 (反比例を例に一定ではないことを確認する) 「表→式」	★表→事象 A3 ★式→事象 B3
	5	比例のグラフと比較した切片の意味「表→グラフ」	★グラフ→事象 C1 C2 C3
	6	傾きの意味と変化の割合との関係「式→グラフ」	
	7	一次関数のグラフを、傾きと切片を用いてかくこと 「式→グラフ」	
	8	一次関数の式を求めること(グラフから式)	★式→事象 (口頭で質問)
	9	(傾き、切片と1点の座標から)	
	10	(2点の座標から)「グラフ→式」	
一次関数と 方程式	11	二元一次方程式と一次関数の関係	
	12	方程式のグラフ「式→グラフ」	★グラフ→事象 C4
	13	連立方程式とグラフ「式↔グラフ」	
一次関数の利用	14	事象の中から一次関数を見だし、一次関数を用いた問題の解決「事象→表、式、グラフ」	★グラフ→事象 C5
	15		
	16	課題学習(検証授業)、関数関係を見だし表、式に表現「事象→表→式」	★式→事象
	17	図形の問題から一次関数を見だし、問題を解決すること	

※具体的な事象に表す活動のアルファベットは、A…表から事象に、B…式から事象に、C…グラフから事象に表す活動を示す。

一次関数の単元を通して表、式、グラフを学習した後に、表を扱う授業では表から具体的な事象に表現する学習を、式やグラフを扱う授業では式、グラフから具体的な事象に表現する学習をそれぞれ取り入れ、単元を通して継続的に行われるように計画した。また比例や反比例の内容を復習するために、比例については単元の初めに一次関数との比較の場面で、反比例については変化の割合が反比例では一定にならないことを確認する場面でそれぞれ取り入れた。

3 課題の工夫

ここでいう課題とは、活動の手立てとして生徒が表、式、グラフから具体的な事象に表現する学習に用いるための問題をさす。

教科書の中で使用されているとびらの問題や例題を参考に、比較的取り組みやすい内容を課題とした。また、具体的な事象に表現する上で、初めから文章による表現は生徒にとって難しいと考え、穴埋め式、選択式、記述式と課題の表現の仕方を段階的にした。表、式、グラフだけから具体的な事象を考えると、自然現象や社会現象には事象が数多く存在し、生徒にとって、どの事象を表せばよいのか漠然として答えにくいと考え、比例や一次関数では教科書の単元のとびらで扱われた「水そうに水を入れたときの時間と水の高さの関係」を用いて表現させるようにし、反比例では1学年時に使用した教科書の例題を表現しやすい文章に直したものを使用した。

(1) 表、式から事象に表現する課題

ここでは一次関数の導入として、比例と比較して一次関数を考える学習(1/17)を例とする。空の水そうに一定の割合で水を入れる場面で、水を入れはじめてから x 分後と、それに伴って変わる底から水面までの高さを y cmとしたときの変化の様子を表に表し、その特徴から表を比例の式に表した。次に予め水が入っている水そうに同じ割合で水を入れたときの変化の様子を表した表から比例と比較して一次関数の式を導く学習をした。その後手立てとなる活動を取り入れ、まずは具体的な事象に表現しやすいように一定の割合がいくらになるのか、何を伴って変わる二つの変数 x 、 y とするのかが分かるように表現した例文(図2)を示し穴埋め式の課題(図3、4)を生徒に解かせた。その際には、空欄に入る数値を選んだ理由とその数値がどのような意味もつかを一緒に考えさせた。

多くの生徒が、表の中から一定の割合で増える数値を見つけ答えることができていた。また、式から具体的な事象に表現する課題でも、例文と穴埋め式にすることにより、比例定数が一定の割合で変化する数値であることが分かり、正しく答えることができていた。

また一次関数の表、式から具体的な事象に表現する場合でも、水そうに水を入れる場面を用いて、予め入っている水の高さ、一定の割合がいくらになるのか、何を伴って変わる二つの量の変数 x 、 y とするのかが分かるように表現した例文(図5)を示し、穴埋め式の課題(図6)を生徒に解かせた。ここでは表と式の関連も捉えられるように、表から式を求める問題も設定した。

多くの生徒は表から式を表す段階で、変化の割合や定数を見つけ、具体的な事象に表現できていた。

(2) グラフから事象に表現する課題

ここでは一次関数についてのグラフを式の傾き、切片を利用して学習(7/17)する場面で取り入れた。グラフの学習では、使用している教科書でもほとんど具体的

1分間に2cmの割合でからの水そうに水を入れたとき。水を入れはじめてから x 分後の、底から水面までの高さを y cmとしたときの x と y の関係

図2 表現しやすいように直した比例の例文

★表→事象A1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	3	6	9	12	15	18	21	24

1分間に.....cmの割合でからの水そうに水を入れたとき。水を入れはじめてから x 分後の、底から水面までの高さを y cmとしたときの x と y の関係

図3 表から事象に表現する課題

★式→事象B1

$$y = 5x$$

1分間に.....cmの割合でからの水そうに水を入れたとき。水を入れはじめてから x 分後の、底から水面までの高さを y cmとしたときの x と y の関係

図4 式から事象に表現する課題

8cmの高さまで水が入った水そうに、1分間に2cmの割合で水を入れたとき。水を入れはじめてからの時間を x 分後の、底から水面までの高さを y cmとしたときの x と y の関係

図5 表現しやすいように直した一次関数の例文

★表、式→事象A2

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	3	7	11	15	19	23	27	31	35

式で表すと
 $y = \dots\dots x + \dots\dots$
cmの高さまで水が入った水そうに、1分間に.....cmの割合で水を入れたとき。水を入れはじめてからの時間を x 分、底から水面までの高さを y cmとしたときの x と y の関係

図6 表、式から事象に表現する課題

な事象は扱われず、与えられた表や式からグラフに表す学習が進められることが多い。そこで式の傾き、切片を利用して一次関数のグラフを求める学習の後に課題（図7）を取り入れた。ここでも水そうに水を入れる事象を使い、これまで学習した内容を参考に具体的な事象を考えさせた。なお負の数の範囲まで含めると具体的な事象に表現しにくいので、表現しやすいように、 x と y の変域を0以上に限定させた。

図8に生徒の解答の例を示す。グラフから傾き、切片を読み取り、例文を参考にして、予め入っていた水の高さ、水を入れる割合を考えて表現している。その際にグラフをいったん式に表している生徒もいて、事象に表現するにはグラフより式の方が考えやすいと思われる。

(3) 式から事象に表現する授業の実際

単元後半にある一次関数の利用の学習（16/17）に図9の課題学習を、図10に示す流れで行い生徒の変容を確認した。

ア ①の段数に伴って変わる数量を見つける活動について

底辺の長さ、高さ、周りの長さ、正方形の数、面積などを見つける生徒が多く、ほとんどの生徒が三つ以上の伴って変わる数量を見つけることができていた。

イ ②の表に表す活動について

4段目以降は実際に図をかきながら、段数とそれに対応させて伴って変わる数量を表し、表の中の関係を見つけて予測して表していた。このことから、具体的な事象から関数関係を見いだす能力が高まったものと考えられる。

ウ ③の表を式に表す活動について

高さや底辺の長さ、周りの長さなどの数量は容易に式に表すことができていたが、比較的に見つけやすい正方形の数や面積は、比例や一次関数の式では表せないの、ここからグループで学習させることにした。これらの関係は上位の生徒でも苦労していたが、ヒントを与えることで式に表すことができていた。

エ ④の全体に発表する活動について

全体に発表することから、見つけにくい数量を考え選ぶグループも現れ、内側にできる辺の数や、交点の数などに着目した数量も発表された。

オ ⑤の伴って変わる数量の関係を文章で表す活動について

式を文章で表現するところまでいかず、数量を単語による表現だけで終わっている生徒が多かった。また、同じ比例の式から別の数量の関係があることに気付いた。

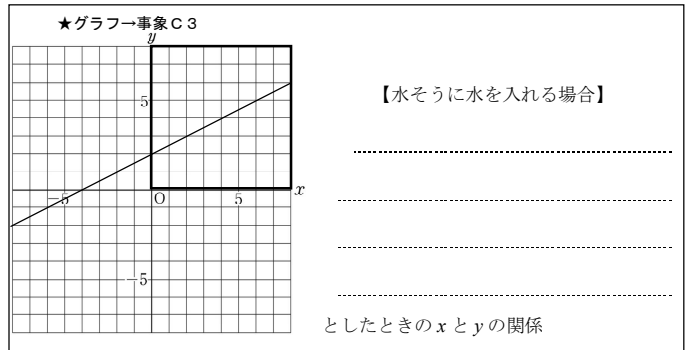


図7 グラフから事象に表現する課題

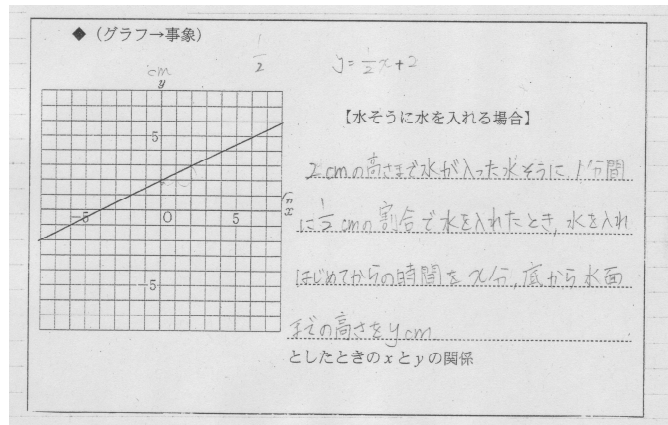


図8 検証授業の課題

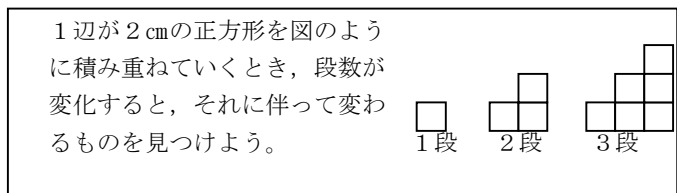


図9 検証授業の課題

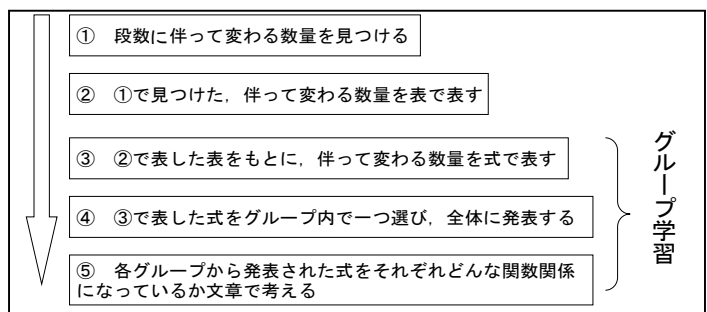


図10 検証授業の流れ

4 諸検査・調査の関数領域の問題における検証結果

本校は各学年1クラスであり、研究対象の2年生への手立て導入の有効性を同学年で比較できないことから、比較の対象として、3年生を用いることにした。まず3年生と2年生の関数領域の学力を比較するために教研式全国標準学力検査NRT（図書文化）と青森県学習状況調査の関数の領域の問題での平均正答率を、全国・県との比で比較した。検証のイメージを図11に示す。

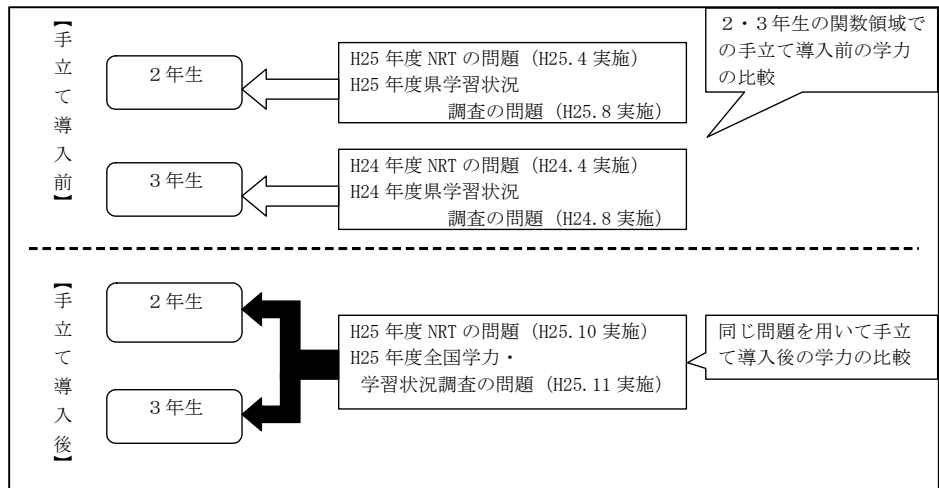


図11 諸検査・調査の関数領域の問題における検証方法

(1) 3年生との関数の領域での学力の比較

表3は、3年生は平成24年度、2年生は平成25年度の4月に実施された教研式全国標準学力検査NRTの関数の領域の問題における平均正答率を、それぞれの年度の全国の平均正答率と比べた全国比（全国を100としたもの）と、それぞれの年度の8月に実施された青森県学習状況調査の関数の領域の問題におけるそれぞれの学年の平均正答率と県との比較（県を100としたもの）を用いて、2年生の3年生との比較を表したものである。この結果から、教研式全国標準学力検査NRTにおいては2年生は3年生より9ポイント下回り、青森県学習状況調査では1ポイント下回っており、手立て導入前の関数の領域における2年生の学力は、3年生より下回っていたと考えられる。

表3 二つの検査・調査問題（関数領域）の結果

	3年生との比較
教研式全国標準学力検査NRT	-9
青森県学習状況調査	-1

(2) 教研式全国標準学力検査を用いた検証

次に表、式、グラフから具体的な事象に表現する手立てを取り入れた結果を検証するために、2年生が平成25年4月に行った、平成25年度教研式全国標準学力検査NRTの関数領域の問題を、手立てを導入した一次関数の単元終了後の10月に2年生はもう一度、3年生は比較のために同じ検査問題を使って検証した。なお、この検査問題は検査終了後に回収されるため、2年生も検査後は目にしていない。

表4 2年生を基準とした平成25年度教研式全国標準学力検査（関数領域）の結果

	4月との比較	3年生との比較
平均正答率	+18.7%	+7.2%
全国比（100）	+41	+16

結果は表4に示されるように、2年生が4月に実施したときと比較しても平均正答率で18.7%、全国比では41ポイントと前回を上回った。また、3年生の平均正答率と比べて7.2%、全国比と比べても16ポイント上回った。

検証に使われたNRTの問題の中で、事象から関数関係を見いだすような図12のような問題では、

深さが10cmの直方体の空の容器に水を150cm³入れると、水の深さが3cmになる。入れた水の体積をxcm³、そのときの水の深さをy cmとするとき。

① xの値が250となるときのyの値を表に表す。
② yをxの式で表す。

図12 検証に使われた事象から関数関係を見いだす問題1

- ① xの値が250となるときのyの値を表に表す問題では、4月と比べて正答率で59.5%→91.9%
② yをxの式で表す問題では21.6%→40.5%と正答率が向上する結果となった。

(3) 全国学力・学習状況調査の関数の領域の問題を用いた検証

また2年生で学習する一次関数を含んだ内容での比較として、平成25年4月に3年生を対象に行われた平成25年度全国学力・学習状況調査の関数の領域の問題を、同じく2年生に単元終了後の11月に行い検証した。

表5 平成25年度全国学力・学習状況調査
(関数領域)の3年生との比較の結果

	数学Aでの比較	数学Bでの比較
平均正答率	+6.3%	+4.4%

結果は表5で示される通り、数学A・Bいずれも全国、県に比べて、平均正答率ではまだ下回っているが、いずれも3年生を上回る結果となった。

特に数学Aで図13のような、事象の中から関数関係を見だし式に表す一次関数の問題では、全国の正答率が55.1%、県の正答率が56.6%、3年生の正答率が41.9%のところ62.2%という結果となった。

12 水が5L入っている水そうに、毎分3Lの割合で、いっぱいになるまで水を入れます。水を入れ始めてから x 分後の水そうの水の量を y Lとすると、 y を x の式で表しなさい。

図13 検証に使われた関数関係を見いだす問題2

以上の結果から、手立て導入前では2年生は3年生よりも、関数の領域では学力が下回っていたが、本研究の手立てを取り入れた授業を行うことで、3年生を上回ることができた、また関数関係を見いだす問題でも正答率の向上も見られることから、具体的な事象から関数関係を見いだす能力が高まったと言える。

V 研究のまとめ

1 単元指導計画について

生徒は表、式、グラフを扱う授業の中で、それぞれ具体的な事象に表現する課題を行うことにより、表、式、グラフと具体的な事象とを双方向で捉えることで、表、式、グラフの特徴とそれらの具体的な事象との関係を関連付けることができ、具体的な事象から関数関係を見いだす能力が高まった。

2 課題の工夫について

穴埋め式、選択式、記述式と課題の表現の仕方を段階的にすることにより、下位の生徒でも容易に取り組むことができた。また「水そうに水を入れたときの時間と水の高さの関係」を単元を通して用いたことにより、具体的な事象に表現しやすくなった。

3 検証結果について

関数領域についての検査問題の結果は、手立て導入前では比較対象とした3年生を下回っていたが、手立て導入後には上回る結果となり、一定の成果があったものと思われる。

以上の結果から、具体的な事象から関数関係を見いだす能力を高めるために、表、式、グラフから具体的な事象に表現する活動を、単元の中を通して行うことは有効であると思われる。

VI 本研究における課題

具体的な事象に表現することに際しては、今回は表現しやすいように教科書のとびらの問題を例に取り上げてきたが、実際には具体的な事象の例は数多くあり、それらの問題にも対応できる課題の工夫が必要である。また、比例、一次関数の問題では一定の成果があったが、一次関数の単元では、反比例に関連した内容を扱うことが少なかった。また反比例に関して具体的な事象が生徒にとって分かりにくく、これらを具体的な事象に表現させる課題の工夫も必要である。

<引用文献>

- 1 文部科学省 2008 『中学校学習指導要領解説 数学編(平成20年9月)』, pp. 47-48