

中学校 数学

平行と合同の学習において、数学的な思考力を高める指導法の研究
—他者の考えを共有する活動を通して多様に考える力を身に付ける—

弘前市立新和中学校 教諭 村 井 正 佳

要 旨

本研究では、平行と合同の学習において、数学的な思考力を高めるために、他者の考えを共有する活動を通して、数学的な思考力の内容の一つである多様に考える力を身に付けることを授業実践を通して検証したものである。その結果、他者の考えを理解し、一つの方法だけでなく、いろいろな方法で考える力が身に付き、数学的な思考力を高めることができた。

キーワード：中学校 数学 数学的な思考力 共有 多様に考える力 分類

I 主題設定の理由

OECD（経済協力開発機構）による生徒の学習到達度調査(PISA)をはじめとする各種の調査において、日本の児童生徒には、思考力・判断力・表現力等を問う問題に課題が見られることが示された。これらのことを受けて、平成20年1月の中央教育審議会は「幼稚園、小学校、中学校、高等学校、及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について」の答申の中で、数学的な思考力・表現力について、「合理的、論理的に考えを進めるとともに、互いの知的なコミュニケーションを図るために重要な役割を果たすもの」と示しており改めてその指導を深めていくことが求められていると言える。

以上の点を踏まえて、筆者のこれまでの指導を振り返ってみると、教師主導の一斉授業の形態による授業が多く、生徒同士で考えを共有する活動を十分に設定してこなかったという反省がある。そのため、本校の生徒の課題としては、教師が解答を提示することを待つことが多く、積極的に課題に向かう姿勢に乏しいということが挙げられる。このことは同時に、多様な考えに触れよう、生みだそうという態度があまり見られないことの要因ともなっていると考えられる。

また、青森県教育委員会が平成22年度に行った学習状況調査の結果から、本校生徒には、「数学的な見方や考え方が低い」という課題もある。

これらの課題に対し本研究では、様々な考えで課題の解決に向かう場面を設定することで、学級全体による数学的な表現力や思考力を高める活動を促し、ひいては、個々の生徒に多様に考える力を身に付けさせ、数学的な思考力を高めることにつながるのではないかと考え、本主題を設定した。

II 研究目標

平行と合同の学習において、課題解決に至る解法を多様に考える活動を取り入れる。さらに、学級全体で考えを共有することで数学的思考力が高まることを実践を通して明らかにする。

III 研究仮説

平行と合同の学習において、以下の活動を取り入れることによって、多様に考える力が身に付き、数学的な思考力が高まるであろう。

- 1 班及び学級での課題解決のための様々な考えを共有する活動。
- 2 自分たちの考えを班及び学級に対して説明する活動。
- 3 班から出された解法を学級全体で分類し、整理する活動。

Ⅳ 研究の実際とその考察

1 研究における基本的な考え方

熊倉らは、数学的な考え方の具体的内容として、(1) 数学的に推論する力、(2) 多様に考える力、(3) 統合・発展・一般化する力、(4) 分類・整理する力、(5) 見通しを立てて予想する力、(6) 検証する力の六つを挙げている。

生徒が実感して分かったと思える授業を実現するには、教師が一方的に解決方法を伝授する授業だけでは難しい。また、一方的に伝授された解決方法では、生徒がそのよさを実感することも難しい。生徒が問題解決へ向けて自ら考え、お互いの考えを比較検討することは、自分と他者の考えの理解を深め、解決方法のよさを実感し、一つの課題をいろいろな観点から見たり、比較したり、分析することができ、数学的な思考を高めることにつながると考える。そこで、先述したとおり本校生徒における課題も踏まえ、本研究では「多様に考える力」を身に付けさせることに視点をおいて研究を進める。

さらに熊倉は「多様に考える力」のことについて「与えられた問題を単に解くだけで身に付くものではない」とし「多様に考える力を高めるためには、1つの問題について「多様に考える活動」を設定する必要がある。そして、生徒の「多様に考えようとする態度」を育成することが重要である。そのためには、多様な解法が考えられる問題を提示し、指導者が「別の方法はないか」、「いろいろな方法で考えてみよう」といった「投げかけ」を、最初は意識して意図的に行うことが大切である」（熊倉啓之、2011）としている。また、田中は「多様な考えを生かす授業とは、授業のねらいを達成するために、多様な考えに順位性をつけて効率的な考えにまとめたり、多様な考えを分類して共通性を見出してまとめたり、それぞれの考えのよさを認めたりと、授業のねらいに応じて、多様な考えを整理していくことである」（田中義彦、2011）としている。

以上のことを基にして、多様に考える力を身に付けさせるための、基本的な授業の流れを図1のように構想した。まず与えられた課題を個人で取り組む。次に班で個人の考えを出し合い検討し、お互いの考えを班で共有する。次に学級で各班の考えを共有し、再度各班での活動に移る。ここでは、自分の班から出なかった他の班の考えについて、どのようにしてその考えで解決できたのかを検討し理解を深める活動をする。他の班から提示された考えについて検討し自分の班で考えつかなかった解法について理解を深める。最後に学級全体で課題解決の解法を分類し、個人で振り返ってレポートにまとめる活動を取り入れた。レポートにまとめる活動の大部分は、授業の時間以外での取組となる。

本研究では「平行と合同」の単元の小単元、「平行線と角」を扱うこととした。この単元は中学校の数学における論証指導の導入に当たる単元とも言え、これ以降の論証指導に向けた大事な学習内容となる。また、この小単元は、生徒の活発な議論ができる教材を多く含んだものでもある。そこで、具体的には、図2のように進めることとした。各授業で課題を一つだけ設定し、深く取り組ませることで多様に考える力を身に付けさせることを考えた。なお、図2に記したキーワードは、生徒が課題の解法について説明する際に用いるものである。

本研究においては、図1の授業の流れの「③学級」の段階で、班から発表シートを用いて考

学習形態	①個人	②班	③学級	④班	⑤学級	⑥個人
学習活動	課題解決に向けて考える	班で考えを検討する	班から発表シートを用いて考えを提示する	他の班の考えを班で考える	解法を分類する	レポートを作成する
	思考	共有	共有	思考・共有	共有・整理	まとめ
授業の流れ						

図1 授業の流れ

履修回数	学習課題	説明時に用いられると予想されるキーワード
第1回	それぞれの多角形で、すべての角の和をいろいろな方法で求めてみよう。 	「補助線」 「三角形の内角の和」
第2回	三角形の内角の和が180°であることをいろいろな方法で説明してみよう。 	「補助線」 「平行」 「延長」 「対頂角」 「錯角」 「同位角」
第3回	∠xの大きさをいろいろな方法で求めてみよう。 	「補助線」 「平行」 「延長」 「対頂角」 「錯角」 「同位角」 「三角形の内角の和」 「三角形の内角と外角の性質」
第4回	∠xの大きさをいろいろな方法で求めてみよう。 	「補助線」 「平行」 「延長」 「対頂角」 「錯角」 「同位角」 「三角形の内角の和」 「三角形の内角と外角の性質」
第5回	ピタゴラスの星形の5つの頂角の和をいろいろな方法で求めてみよう。 	「補助線」 「平行」 「延長」 「対頂角」 「錯角」 「同位角」 「三角形の内角の和」 「三角形の内角と外角の性質」

図2 小単元 検証授業計画

えを提示するとき、説明などは一切せず、解決に用いた補助線をひいた図を学級に提示させることにした。図3はその例である。例えば、「三角形ABCの内角の和が 180° であることを説明しなさい」という課題が生徒に与えられたとき、ある班は三角形の三辺にそれぞれ平行な補助線を図3のようにひいたものを学級全体に示したとする。この後、他の班はこの図を基に、図を提示した班がどのような図形の性質を用いて解決したのかを考えていくのである。つまり、生徒は自分たちにとって未知の考えを、補助線を頼りにたどっていくことで、数学的な思考力を高めていくのである。補助線に着目したのは、図2に示されている各課題が補助線のひき方一つで多様な考えで解決することができ、多様な解法があることを実感させることにつながると考えたからである。

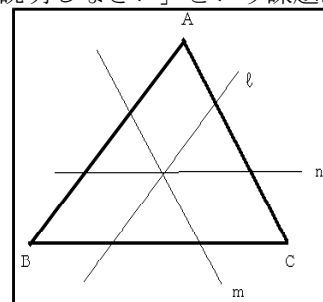


図3 補助線をひいた図例

2 授業の実際

対象生徒は第2学年42名である。小単元「平行線と角」は図4に示したとおり7時間を配当するように指導計画を立て、検証授業としては、このうち5時間を充てた。学習のねらいと、実験群及び統制群の学習課題を図4に示している。

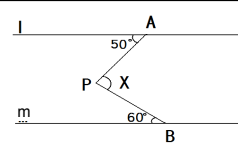
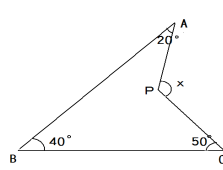
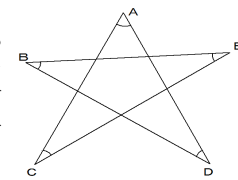
時間	学習のねらい	実験群の学習課題	統制群の学習課題
1	三角形の内角の和が 180° であることを用いて多角形の内角の和を求めることができる。 【検証 第1回】	それぞれの多角形で、すべての角の和をいろいろな方法で求めてみよう。 (他者の考えを共有する活動)	四角形から八角形までを、対角線で三角形に分け、それを基に内角の和を求めよう。 (帰納的に考えて多角形の内角の和について一般化する・一斉授業)
2	多角形の内角の和や外角の和の性質を知り、内角や外角を求めることができる。	多角形の内角と外角について学ぼう。 (他者の考えを共有する活動)	実験群と同じ。
3	対頂角や錯角、同位角の意味や性質を知り、角の大きさを求めることができる。	平行線と角について学ぼう。 (他者の考えを共有する活動)	実験群と同じ。
4	三角形の内角の和が 180° であることを平行線の性質を基にして説明することができる。 【検証 第2回】	三角形の内角の和が 180° であることをいろいろな方法で説明してみよう。 (他者の考えを共有する活動)	三角形の内角の和が 180° であることを説明しよう。 (一通りの証明の仕方を学習し、証明について学ぶ。また、三角形の内角の性質を用いて角を求める演習を行う・一斉授業)
5	平行線の性質や三角形の内角や外角の性質を用いて、角の大きさを求めることができる。 (その1) 【検証 第3回】	次の $\angle x$ をいろいろな方法で求めよう。  (他者の考えを共有する活動)	学習課題の解説と問題の演習を教師主導で指導を行う。 (一斉授業)
6	平行線の性質や三角形の内角や外角の性質を用いて、角の大きさを求めることができる。 (その2) 【検証 第4回 本時】	次の $\angle x$ をいろいろな方法で求めよう。  (他者の考えを共有する活動)	学習課題の解説と問題の演習を教師主導で指導を行う。 (一斉授業)
7	ピタゴラスの星形の5つの頂角の和を求めることができる。 【検証 第5回】	ピタゴラスの星形の5つの頂角の和をいろいろな方法で求めてみよう。 (他者の考えを共有する活動) 	学習課題の解説と問題の演習を教師主導で指導を行う。 (一斉授業)

図4 検証授業の指導計画

図5は、「凹型四角形の角」を題材として取りあげた検証第4回の授業の指導過程であり、太線枠の部分は他者の考えを共有する活動を示している。本時の目標は $\angle x = \angle a + \angle b + \angle c$ について、既習事項を活用して、補助線を用いて多くの解法を考え出すことができることである。

2学年42名を統制群と実験群それぞれ21名ずつに分けた。比較するポイントは以下の二つである。

- ・図6の検証問題における解法の数と、的確に用いられた数学の用語の使用頻度。
- ・図2に示した五つの課題に対して、生徒が考えた解法の多様性の変化。

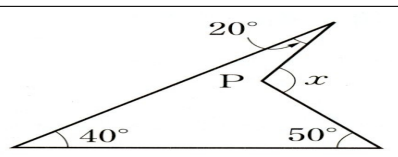
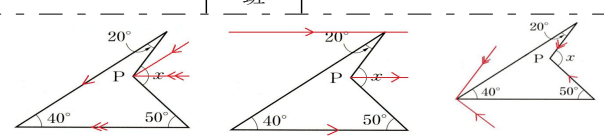
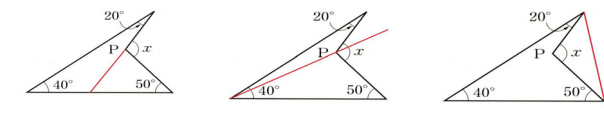
段階	教師の働きかけ	予想される生徒の活動	形態	留意点・評価
導入 5分	・説明をします。ワークシートの上の部分を見ながら話を聞こう。	・黒板に提示された問題の図を見ながら説明を聞く。	一斉	・ワークシート①を配付する。
展開 35分	・今日はこの問題を考えよう。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\angle x$をいろいろな方法で求めてみよう </div> 	・説明を聞いて、手順を覚える。 ・ワークシートが1枚で足りない場合、教師からもらう。		・板書を用いて説明する。 ・まとめ方の説明を掲示する。 ・ワークシートがもう1枚欲しい生徒に随時渡す。
	・まとめ方の説明をします。 ① 最初は個人で、指示があったら班になって考えよう。 ② 班長は発表シートとペンセットを取りに来よう。 ③ シートに補助線をひき、黒板に貼ろう。	<予想される解答>	個 ↓ 班	・発表資料用シート、及びペンセット配付。
	・補助線のひき方を調べよう。	<div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> ※パターン1 平行線によって、角を1箇所に集めてくる発想につながるもの。 </div>  <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px;"> ※パターン2 三角形の内角と外角の関係、三角形の内角の和などを利用して角を集めたり、角の関係を考えたりするもの。 </div> 	一斉 ↓ 班 ↓ 一斉	・机間支援 ・机間支援
	・補助線だけの図を見て、自分の班になかった考えについて説明を考えてみよう。 ・質問をして、分からないところを解決しよう（無い場合でも、理解していないような班があれば、説明を促す）。 ※生徒が考えつかないパターンがある場合は時間を見て、教師から案を出す。 ・考えを分類してみよう。	・説明を聞いてから、班になり自分たちの班で出なかった案について考える。 ・説明が分かっている班も説明を聞く。 ・質問された班の代表の生徒は説明をする。 ・黒板に提示されたシートを、どのように分類すればよいか考える。	一斉 ↓ 班	・机間支援
終末 10分	・まとめよう。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\angle x = \angle a + \angle b + \angle c$ は補助線のひき方によっていろいろな方法で解決することができる。 </div>	・レポート用紙に考えをまとめる。	一斉 ↓ 班	

図5 検証第4回の指導過程

3 考察

(1) 検証問題による検証

ア 検証問題の解法の数の比較

図6に示した検証問題を実験群・統制群に、多様に考える力の定着度を見るために、5回の検証授業を終えてすぐにはなく、1週間の間をあけて実施した。また、これを検証問題としたのは、図形の四つの角の和を求める解き方が補助線のひき方によって複数あり、多様に考えることができる問題で検証問題としてふさわしいと考えたからである。検証問題は、生徒が幾つの解き方を解答用紙に記入したかを一

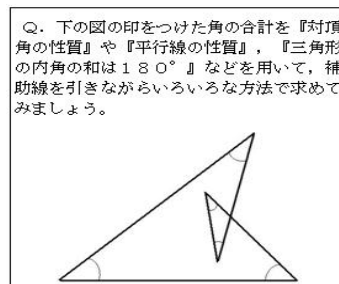


図6 検証問題

人ずつ数え、群ごとにその平均を求めて比較した。結果は表1に示したとおりである。このことから、他者の考えに触れ、考えを共有することが有効であったことが示されていると考える。

イ 検証問題で使われた数学の用語の数について

検証問題の解法の説明の中で、どの程度図形の性質を的確に用いているかを比較した。これは、数学的な表現をするには数学的な思考力が必要であり、的確な数学の用語の使われ方がされていれば、思考力が高まっていると見られると考えたからである。具体的には、表2に示した一つの解法あたりの数学の用語の使用頻度の平均と、表3では、説明に使われた数学の用語の内訳を示した。表2で一つの解法に用いられる数学の用語の頻度が統制群に比べ実験群がかなり高い。これは数学的な思考力が高まり、数学的な表現力が高まったと考えることができる。

表3は、具体的にどのような用語が2群で用いられているかを示したものである。実験群は、説明に用いられる全ての数学の用語を用いている。これは、他者の考えを共有することにより、既習事項を多様に活用することができ、多様に考える力が身に付いてきたと言える。「錯角」と「同位角」の使用頻度が高いのは、角の和を求めるときに平行線の性質を利用して角を集める方法が定着しているからだと推察される。

他者の考えを共有する活動は、数学的な表現力を高めた。そのことから数学的な思考力を高めているとうかがえる。

(2) 生徒の解法を分類した結果を基に検証

図2で示した各課題に対して、実験群の生徒が考え出した解法が、幾つに分類されるかについて分析をした。表4は各検証授業におけるそれぞれの課題に対して、生徒が考え出した補助線のひき方についてまとめたものである。これらのうち、授業において生徒が考えつかなかったものは、第1回の③と④、第2回の③と④の四つであった。第3回以降は課題の難易度が高くなるにも関わらず、生徒は多様な考え方をすることができたことがうかがえる。また分類をする場面で「平行線」・「延長線」、「対頂角」・「錯角」・「同位角」・「三角形の内・外角の性質」、「平角 180° 」・「三角形の内角の和が 180° 」といった言葉に着目し、各班から出された複数の考え方に共通性を見いだしながら統合し整理していくことができるようになった。これらのことは、生徒が他者の考えを理解し共有することができるようになり、課題解決には多様な考え方ができることを実感してきたことの証左であろうと考えられる。

以上の点から、他者の考えを共有し、他者へ自分の考えを説明し、整理するという一連の活動が、生徒の数学的な思考力を、多様に考える活動を通して高めることにつながったと言えるのではないだろうか。

表1 解法の数の平均

	統制群	実験群
解法の数の平均	0.4	2.15

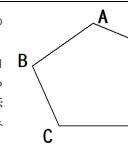
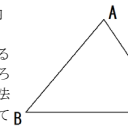
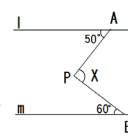
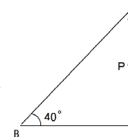
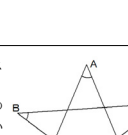
表2 一つの解法あたりの数学の用語の使用頻度

	統制群	実験群
一つの解法あたりの数学の用語の使用頻度	0.13	4.02

表3 数学の用語の使用頻度

	統制群	実験群
対頂角	0.05	0.80
錯角	0	4.75
同位角	0	2.65
三角形の内角・外角	0	0.35
三角形の内角の和	0	0.05

表4 解法の分類

検証	学習課題	生徒の考えの分類
第1回	それぞれの多角形で、すべての角の和をいろいろな方法で求めてみよう。 	①1つの頂点から対角線をひく。 ②多角形の内部に1点を取り、その点と頂点を線分で結ぶ。 ③辺上に1点を取り、その点と頂点を線分で結ぶ。 (教師から学級全体に提示) ④多角形の外部の1点と頂点を線分で結ぶ。 (教師から学級全体に提示)
第2回	三角形の内角の和が 180° であることをいろいろな方法で説明してみよう。 	①1つの頂点を通り向かいの辺に平行な直線をひく。 ②1辺を延長し、その辺の端の点を通り、その点の向かいの辺と平行な直線をひく。 ③辺上に1点を取り、その点を通り他の2辺に平行な直線をひく。(教師から学級全体に提示) ④三角形の内部に1点を取り、その点を通り各辺に平行な直線をひく。(教師から学級全体に提示)
第3回	$\angle x$ の大きさをいろいろな方法で求めてみよう。 	①線分AP(またはBP)を延長する。 ②直線l(またはm)に平行に点Pを通る直線をひく。 ③直線l(またはm)の垂線をひく。 ④点A, Bを通る直線をひく。
第4回	$\angle x$ の大きさをいろいろな方法で求めてみよう。 	①半直線BPをひく。 ②点Pを通り、辺AB(またはBC)に平行な直線をひく。 ③点Pを通り、辺ABと辺BCに平行な直線をひく。 ④点Aを通り辺BCに平行な直線と点Cからその平行線に垂線をひく。 ⑤2点A, Cを線分で結ぶ。 ⑥点Bを通り、辺APと平行な直線と辺CPに平行な直線をひく。 ⑦半直線AP又は半直線CPをひく。
第5回	ピタゴラスの星形の5つの頂角の和をいろいろな方法で求めてみよう。 	①星形の5つの頂点を線分で結ぶ。 ②星形の1つの頂点を通り、辺に平行な直線を3本ひく。 ③星形の1つの頂点を通り、辺に平行な直線を2本ひく。 ④1つの頂点を通り辺に平行な直線を、頂点を変えて2本ひく。 ⑤星形の頂点の1つを通り、辺に平行な直線と星形の図形の内部にある5角形の頂点の1つを通り、星形の辺に平行な直線をひく。

V 研究のまとめ

本研究では、数学的な思考力の内容の一つである多様に考える力を身に付けさせるために、他者の考えを共有する活動を位置付けた。

課題を1時間の授業に一つとし、課題について個人で考え、班で考えを共有し、課題の図に補助線をひいたものを発表用シートにかいて説明等を一切せずに学級全体に提示し、そして、自分の班が考えつかなかった図について、この補助線でどのように解決したのかを考えた。この活動は、他者の考えの説明を聞くだけでは違い、他者の考えの理解を深め、解法の定着が図られ、多様に考える力が身に付いた。

また、生徒から学級全体に提示された解法を、数学の用語から共通性を見いだし分類する活動は、考えを整理することになり、自分たちが考えたことについて振り返る機会を与え数学的な思考力を高めることにつながった。

本単元に入るまでは、たくさん問題をパターン化して解くという授業展開が多かったため、一つの問題に対して一つの解法だけを答えるということが多かった。本研究の取組を通して、生徒は一つの問題に対して一つの解法だけでなくさらに別な考えをし、新たな解法を見いだすことができるようになった。これは、多様に考える態度も育成されたと考えられる。

VI 本研究における課題

今回の研究では、ほとんどの生徒が数学的な思考力が高まったと考えられるものの、中には自分の班の中の考えや教室全体での説明をしっかりと理解できなかった生徒がいたのも事実である。このような生徒に対する支援の方法や班活動での話し合いの工夫、教師の机間支援の在り方など、個に対応した指導の充実について考える必要がある。また、生徒が考える時間の確保と考えを分類する時間の取り方がうまくいかず、1時間の授業枠では収まらない場合もあった。そのため、一単位時間で活動を完結させる工夫が必要である。そのためには、本研究で行った活動の仕方に生徒が慣れていくことも必要であると考えられる。また、例えば指導計画全体を見直し、各単元のどこに他者の考えを共有する活動を位置付けるかという指導計画の工夫も考えられる。こうした活動を十分に確保していくことも、今後の課題である。

<引用文献>

熊倉啓之 2011 『小集団での追究で効果抜群！数学的な思考力・表現力を鍛える授業24』, p. 7, pp. 17-18, 明治図書

田中義彦 2009 「3 多様な考えを生かす授業」『中学校 新数学科の授業創り2 新たな数学の授業を創る』, p. 67, 明治図書

<引用URL>

中央教育審議会 2008 「幼稚園、小学校、中学校、高等学校、及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（答申）」

http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/news/20080117.pdf (2011. 5. 24)

<参考文献>

文部科学省 2008 『中学校学習指導要領解説 数学編（平成20年9月）』

<参考URL>

齊藤啓一 2010 「数学的に考える力を育てる系統的な指導に関する研究—児童の考える力の実態調査とその分析を通して—」『平成21年度研究紀要(第834号)』福岡市教育センター

<http://www.fuku-c.ed.jp/center/houkokusyo/h21/index.htm> (2011. 5. 24)

仲宗根歩 2011 「数学的な見方や考え方を高める学習指導の工夫～問題の工夫と練り合いの場を通して～」『那覇市立教育研究所研究報告書（平成23年度）』

http://www.nahaken-okn.ed.jp/naha-c/ken_pdf/96/709.pdf#search= (2011. 10. 5)

