

中学校 数学

相似な図形に対する直観を養うための指導の工夫
— 操作的活動を基に、相似である根拠を明らかにする活動を通して —

新郷村立新郷中学校 教諭 福田 美希

要 旨

相似な図形に対する直観を養うために、直観的な見方を深めることに着目して、三つの学習活動（相似であることを確認させる操作的活動、相似な図形を予想し確認させる操作的活動、根拠を明らかにする活動）を取り入れた。操作的活動だけでは難しいが、これを行ったあと根拠を明らかにする活動を取り入れることで相似な図形に対する直観的な見方が深まり、図形に対する直観を養うことができた。

キーワード：相似な図形 直観 直観的な見方 操作的活動 根拠を明らかにする活動

I 主題設定の理由

中学校学習指導要領解説数学編（文部科学省，2008）には、論理的な思考力の育成について、図形に対する直観や洞察の能力を伸ばすことを目標の一つとし、「図形に対する直観や洞察は、図形の性質の根底にある本質的なものを見抜くことであって、論理的な思考力に裏打ちされていることが必要であり、論理的な思考を導くはたらきをすることもある」とある。また、中学校数学科の図形指導の意義の一つとして「図形に対する直観的な見方や考え方や図形の性質を数学的な推論の方法によって考察する過程を通して養われる論理的な見方や考え方は、中学校数学科に限らず、いろいろな分野での学習において重要な役割を果たすものであり、論理的に考察し表現する能力を一層伸ばすこと」とある。

相似な図形において、例えば、相似な三角形を利用して問題解決するとき、相似な三角形を見抜くことが必要となる。しかし、実物を通して相似の概念を理解し、基本的な図形の性質や三角形の相似条件をそれぞれ理解しているにも関わらず、課題で提示される図形において、相似な三角形を見抜くことができない生徒を筆者は見えてきた。これは、図形に対する直観的な見方ができていないからだと考えた。図形に対する直観的な見方や考え方ができなければ、相似な図形に対する直観や洞察の能力を伸ばすことは難しい。そこで、直観に着目し、図形に対する直観の能力を伸ばすために、図形に対する直観的な見方を深めることが必要だと考えた。相似は合同と違って、大きさが違うために相似であることを認識しにくいことがある。そこで、相似な図形の概念を正しく認識するために操作的活動を取り入れることを考えた。また、見た目だけで判断すると誤認する場合があったり、図が不正確なために判断できない場合があったりする。そこで、根拠をもって相似であることを判断できるようにさせるために、操作的活動のあとに相似である根拠を明らかにする活動を取り入れることを考えた。

操作的活動を行うことで相似な図形の概念を正しく理解させ、そのあとに根拠を明らかにする活動を取り入れることで相似な図形に対する直観的な見方を深め、そして、直観的な見方ができるようになれば相似な図形に対する直観を養うことにつながると考え、この主題を設定した。

II 研究目標

相似な図形の学習において、操作的活動を行い、そのあと根拠を明らかにする活動を取り入れることで、相似な図形を実感し、相似な図形に対する直観的な見方が養われることを授業実践で明らかにする。

III 研究仮説

相似な三角形についての学習で、相似な図形の対応する角はそれぞれ等しいことに着目し、以下の学習活

動を行うことで相似な図形に対する直観的な見方を深め、図形に対する直観を養うことができるだろう。

- ① 相似な図形であることを写し紙で確認させる操作的活動
- ② 相似な図形を予想させ、写し紙で確認させる操作的活動
- ③ ②で相似を確認した図形について、根拠を明らかにする活動

IV 研究の実際とその考察

1 研究における基本的な考え方

(1) 図形に対する直観について

算数教育指導用語辞典によると、「直観的」「直観力」「直観像」の三つを含んだものを直観と考える」とよいとある。さらに杉本(2009)は、「直観」には三つの意味が含まれている。一つには、すばやく直接的に対象をとらえる方法を意味する「直観的」、二つには、例えば図形を頭の中に思い浮かべ、それを念頭で操作し、その結果を想像した姿を表す「直観像」、三つには、全体の構造を把握し、問題の本質を見抜く力を意味する「直観力」である。」と示している(杉本悦郎, 2013)。直観を養う上で「図形を構成したりするなどの具体的な操作活動が欠かせない」「図形の性質を見抜くことなども大切な活動」「図形を観察し、その図形の性質を予測し、これを確かめるという学習活動も大切である」(算数教育指導用語辞典, 1993)とある。よって、これらから直観を養うために直観的な見方を深めることが重要で、そのために操作的活動は必要であり、さらに根拠を明らかにする活動も行わなければ不十分であると考えた。

小学校学習指導要領において、各学年とも目標に、図形についての感覚を豊かにすることが明示されている。図形についての豊かな感覚として、ものの形を認める感覚と、形の特徴を捉えたり、性質を見付けたりする感覚が挙げられている。中学校学習指導要領解説数学編では、図形についての感覚に関する記述がない代わりに直観や洞察といった表現を使っている。川寄(2001)は、「最も適切な図形の見方を判定し、選択できるという図形感覚の質的側面を表す言葉」として、「鋭い図形感覚」という言葉を使って、「図の中に様々な図形が見える場合、あるいは様々な補助線が考えられる場合、それらの中での最も目的に適する見方が選択できることは図形感覚の質が高いことを意味する。」と示している(川寄道弘, 2013)。これは、先に述べた「直観的」や「直観像」にあてはまると考えた。また、図形を認識する過程や論証する過程において、図形感覚の果たす役割は大きく、それは視覚的な認識によって大きな影響を受けていると考えた。そこで、操作的活動を通して図形的に認識する経験を積み、根拠を明らかにする活動を重ねれば、図形に対する直観的な見方を深め、図形に対する直観を養うことができると考えた。

(2) 相似な図形に対する直観を養うための学習活動について

相似な図形の対応する角はそれぞれ等しいことに着目し、①相似であることを確認させる操作的活動、②相似な三角形を予想させ確認させる操作的活動、③根拠を明らかにする活動、の三つの学習活動を取り入れて、表1のように単元指導計画を作成した。

表1 単元指導計画(第3学年 相似な図形)

時	検証	検証に関わる活動内容	授業内容
1	事前調査	合同な三角形を見抜く	相似な図形の性質
	確認させる操作的活動	相似な図形の対応する角の大きさの関係を写し紙を使って調べさせる	
2	確認させる操作的活動	相似の位置にある図形が相似であることを写し紙を使って確認させる	相似の中心と相似の位置の意味
3	中間調査①	相似な三角形を見抜く 相似な三角形の組が複数ある図から相似な三角形の組を予想させる①	相似比
4 5	予想・確認させる操作的活動	相似な図形の対応する辺を確認するために写し紙を使用させる	対応する辺の長さを求める
6	中間調査②	相似な三角形の組が複数ある図から相似な三角形の組を見抜く②	三角形の相似条件
	予想・確認させる操作的活動	条件にそって作図した三角形が相似かどうかを予想、確認させる	
7	検証授業	相似な三角形を予想させる 予想を写し紙を使って確認させる	三角形の相似の利用
8	根拠を明らかにする活動	根拠を明らかにさせる	
9 10	根拠を明らかにする活動	相似な三角形の根拠を明らかにさせる	三角形と比 中点連結定理
11	事後調査	相似な三角形の組が複数ある図から相似な三角形の組を見抜く③	

(3) 「図形に対する直観」と「操作的活動」と「根拠を明らかにする活動」との関連

直観と論理は相互補完的な関係にあることから、「図形に対する直観」と「根拠を明らかにする活動」は相互補完的な関係にある。また、図形に対する直観的な見方を深めなければ、「図形に対する直観」を養うことができないことから、図形に対する直観的な見方と「図形に対する直観」は密接な関係にある。そして、「操作的活動」を繰り返し行うことで図形に対する直観的な見方を深めることができることから「図形に対する直観」と「操作的活動」は関連があると考えた。

ただし、図が不正確な場合や図が提示されていない場合は操作的活動の効果が発揮されない。つまり、図形に対する直観を養う上で操作的活動だけでは不十分である。そこで、操作的活動を行ったあと、根拠を明らかにする活動を取り入れていけば、操作的活動を行わなくても徐々に角が等しいことを認識させることができ、さらに、念頭操作で図形を想像する力を高めることができると考えた。また、根拠を明らかにする際に操作的活動が手がかりとなることもある。よって、「操作的活動」と「根拠を明らかにする活動」も相互補完的な関係があると考えた。これより、「図形に対する直観」と「操作的活動」と「根拠を明らかにする活動」は相互補完的な関係にあると考え、操作的活動と根拠を明らかにする活動を繰り返して行うことで相似な図形に対する直観的な見方を深め、図形に対する直観を養うことができると考えた。

2 研究内容

(1) 相似であることを確認させる操作的活動

主に単元の始めに行う。相似な図形を提示し、一方の図を写し紙に写し、対応する角に合わせて他方に重ね合わせることで、相似であることを確認させる活動を取り入れる。重ね合わせることで角の大きさが等しいかどうかが一目瞭然であるため、相似な図形を図形的に認識させやすく、相似の概念を理解させやすいと考えた。

(2) 相似な三角形であるかどうかを予想させ、確認させる操作的活動

単元の半ばから行う。提示された三角形が相似であるか、または相似な三角形があるかを予想させ、写し紙を使って確認させる活動を取り入れる。これにより、生徒自身で直観的な見方が正しいかどうか確認できるだろうと考えた。

(3) 根拠を明らかにする活動

単元の後半に行う。図形領域の学習を通して、生徒は論理的に考察し表現する能力を伸ばしていかなければならない。そのためには、操作的活動で確かめたことを論理的に考察し表現する活動が必要となる。

本研究では、操作的活動で確認した対応する角の組を書き出し、それらが等しいことの根拠を考えさせる。これにより、根拠を明らかにすることができれば論理的に考察し表現することができるようになり、図形に対する直観的な見方を深めることができるだろうと考えた。

3 検証方法

- (1) 相似な三角形の組が複数ある図から相似な三角形を見抜くことを複数回行い、結果の変移を分析する。
- (2) 生徒の意識調査を行う。(調査対象は第3学年の生徒16名)

4 検証授業の実際

三角形が相似であることを証明する授業を、図1のように、予想、確認、証明の流れで行った。まず、図を提示し、相似な三角形を予想させた。次に、予想した三角形が相似であるかを写し紙を使って確認させた(予想し確認する操作的活動)。相似であることを確認させたのち、角が等しい根拠を明らかにさせた。また、写し紙を使って確認したら角が等しくないために予想した三角形が相似ではない場合もあった。

また、図2のように、写し紙で3組の角が等しいことが確かめられたとき、証明ではどの組を用いればよいのか困っていた生徒もいたが、根拠を明らかにできなかった組があることに気づき、相似条件に合致する2組の角を選ぶことができていた。

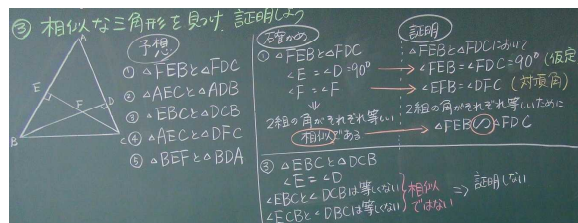


図1 予想、確認、証明の黒板の様子

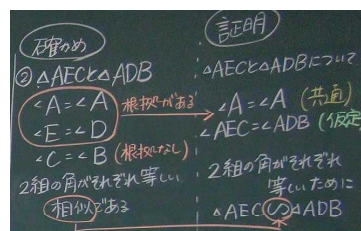


図2 証明でどの組を選ぶかの黒板の様子

その後の授業で、図3のように辺の長さが分かっている場合について相似な三角形を予想させた。操作的活動で等しい角を確認して証明しようとしたが、3組中2組の角について根拠を明らかにすることができなかった。そこで、等しい角を確認した際に写し紙を裏返したことに着目して

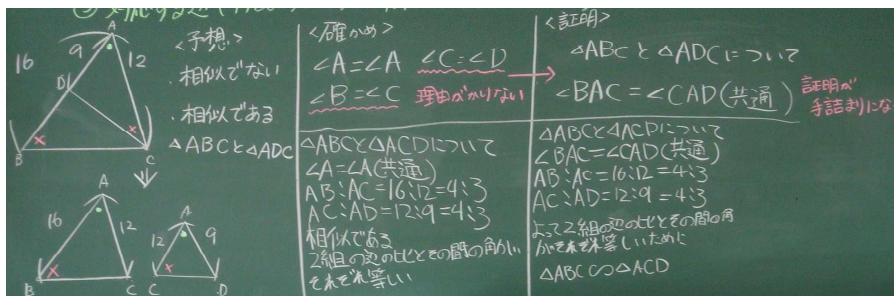


図3 辺の長さが分かっている場合

対応する角を基に図をかき直させたら、相似な三角形の組があることに気付いた。このような活動を繰り返し行うことで、念頭操作で図形を想像する力を高め、直観的な見方を深めることができると考えた。また、相似な三角形はないと答えた生徒にとっても相似な三角形があると気付かせるきっかけになった。

5 検証

(1) 事前調査 (三角形の合同の認識について：調査当日は欠席者が1名いたため、15名で実施)

① 目盛りを基に長さによって合同な三角形を判断させる事前調査 (図4)

全員が、正答である「アとカ」を答えた。しかし3名が他に「イとウも合同」であると解答した。

(底辺は同じ長さだが、高さが1目盛り違う)

② 図中の印を基に長さによって合同な三角形を判断させる事前調査 (図5)

図中の印は合同を示すための根拠となることにつながり、図中の印を手がかりに三角形の合同を見抜けるか調査を行った結果、15名全員が左右の三角形が合同であると解答した。しかし2名が他に図6のように解答した。つまり、等しいことを表す記号よりも視覚的な認識のみで判断していることがあるため、根拠を明らかにする活動が大事であると言える。

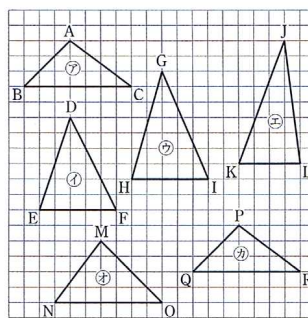


図4 事前調査①

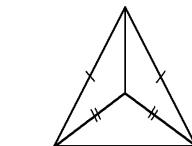


図5 事前調査②

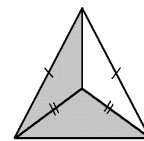


図6 誤認した解答

(2) 相似な図形の認識について

① 目盛りを基に相似な図形を判断させる調査

相似な図形の性質を学習後に、図7を用いて、相似の概念をどの程度理解しているのかを調査した。

その結果16名全員が①と⑥を相似であると答えた。しかし1名が③も相似であると誤答した(底辺の比は1:2, 高さの比は2:3)。また②と③を相似であると誤答した生徒が1名いた(底辺, 高さともに比は2:3だが、右側の辺の傾き加減が異なる)。①を横方向にだけ2倍に拡大した④や、縦方向にだけ2倍に拡大した⑤を選ぶ生徒はいなかった。ほぼ全員が相似の概念を理解しているということが分かった。

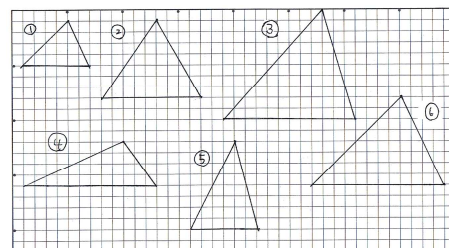


図7 相似な図形を判断させる調査

(3) 生徒が見抜いた相似な三角形の組数の変容を見る調査

図8 (AD // FG // BC) を用いて、相似な三角形を何組見抜いたかを調べた(この調査は、解答、解説をいっさい行っていない)。

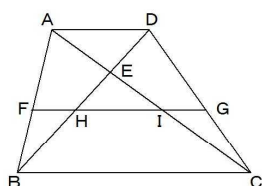


図8 変容を見る調査

表2 見抜いた組の平均

	平均
3時間目(中間)	3.6問
6時間目(中間)	4.3問
事後調査	6.3問

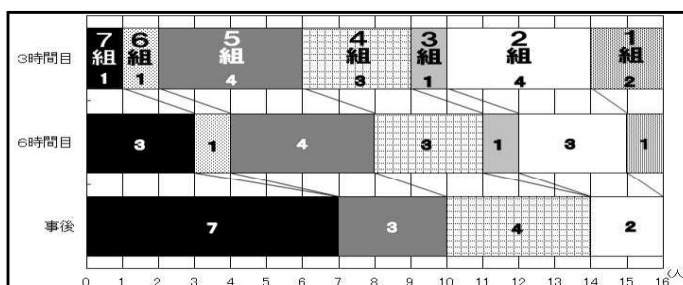


図9 見抜いた組数の変移

前時まで相似であることを確認する操作的活動のみ行った3時間目の中間調査と、予想し確認する操作的活動も行った6時間目の中間調査と根拠を明らかにする活動も行ったあとの事後調査の合計3回を行った。図9や表2より、回を重ねるごとに相似な三角形の組を多く見抜けるようになった。個人ごとの変容を見ても、多くの生徒が回を重ねるごとに見抜いた相似な三角形の組数が増えた。つまり、相似な図形に対する直観的な見方を養うことができたと言える。

(4) 事後調査の一環として

別の図で、相似である三角形の組をどの程度見抜けるかを調査した。

① 相似な三角形が3組ある場合 (図10)

表3より8割の生徒が相似な三角形を2組以上見抜いたため、相似な図形に対する直観的な見方が深まったと言える。しかし、依然として $\triangle BEF$ と $\triangle EFD$ のように隣同士の三角形も相似であると誤認した生徒も多く、それは相似な三角形を3組全て見抜いた生徒の中にも見られた。様々な図形の見方ができるようになっており、根拠を明らかにすることを重視すれば相似な図形に対する直観的な見方をより深めることができるだろうと言える。

② 相似な三角形が11組ある場合 (図11)

①の調査の約2週間後に行った。 $\triangle HBE$ と $\triangle IGF$ など気付かない組もあるが、多数組を見抜けるようになった(表4)。

①、②の事後調査とも、相似に気付かない三角形の組や、相似であると誤認しやすい三角形の組が数組含まれているにも関わらず、多数の相似な三角形の組を見抜けるようになってきていることから、多くの生徒が相似な図形に対する直観的な見方が深まり、相似な図形に対する直観が養われたということが分かった。

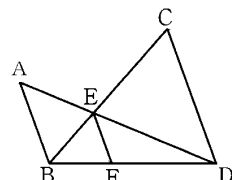


図10 相似な三角形が3組ある図

表3 見抜いた組数 (図10)

相似な三角形	1組	2組	3組
人数	3	3	10

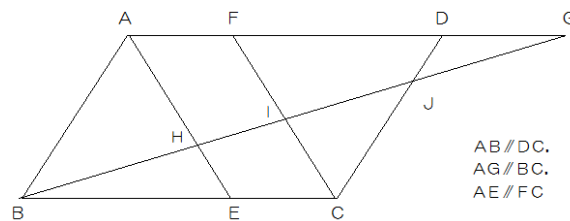


図11 相似な三角形が11組ある図

表4 見抜いた組数 (図11)

相似な三角形	2組	3組	4組	5組	6組	7組	8組	9組	10組	11組
人数	1	1	0	4	1	3	0	2	2	2

(5) 意識調査より

写し紙の有効性について、図12より、ほとんどの生徒が有効であると答えた。そして、その理由を自由記述させたところ、「とても有効である」という生徒は、対応する角や辺が分かるから、確認できるからと答えた。中には、相似を確認できる最も有効な道具であると答えた生徒もいたことから、写し紙は相似を実感できる道具であることが分かった。「少し有効である」という生徒は、写し紙を使わなくても相似を判断できるようになってきたからと答えた。よって、写し紙を使った操作的活動は、相似を図形的に認識するために効果的であったと言える。「あまり効果なし」と答えた生徒は、単元の始めの段階で写し紙を使わなくとも相似であることを判断できるようになり、写し紙を使う必要性を感じなくなったと答えた。

三角形の合同の証明について事前調査を行ったところ、苦手意識が強かった生徒の多くが等しい辺や角の組が分からない、または、なぜ等しいのか根拠が分からないと答えた。しかし、三角形の相似を証明する際に予想、操作的活動、根拠を明らかにする活動という流れで行ったことについて、図13より、ほとんどの生徒がやりやすかったと答えた。生徒にとって、どの角が対応しているのか、角が等しい理由、適切な三角形の相似条件など、証明するために何を明らかにすれば良いのかがより分かりやすかったようである。

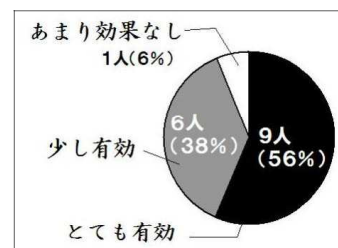


図12 写し紙の有効性

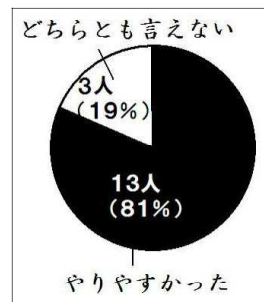


図13 証明までの流れ

図14より、多くの生徒が三角形の合同の証明が得意ではなかったが、図15より、三角形の相似の証明について積極的に、または、なんとか取り組めそうと答えた生徒がほとんどであった。また、相似な三角形を見抜くことも図16より、ほとんどの生徒が見抜けるだろうと答えていることから、相似な図形の証明に取り組む意欲につながっていると考えられる。

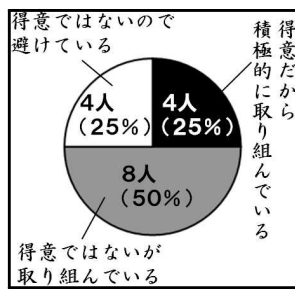


図14 三角形の合同の証明について

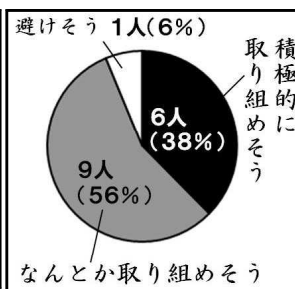


図15 三角形の相似の証明について

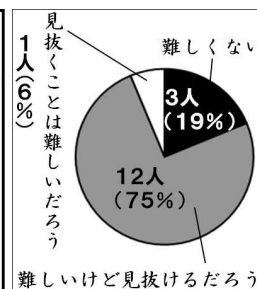


図16 相似な三角形を見抜くこと

V 研究のまとめ

単元の始めは操作的活動を多く取り入れた。途中から相似であるかを確認する操作的活動を生徒自身に判断させて行わせ、徐々に操作的活動から離すようにした。図形分野が不得意な生徒にとって、操作的活動が非常に有効な手段であったのは、相似な三角形の組を見抜く調査や意識調査から明らかである。検証授業で扱った図や事後調査で扱った図では、見抜けなかった相似な三角形の組もあった。よって、操作的活動は毎時間でなくとも取り入れていく必要があり、操作的活動を行いながら根拠を明らかにする活動を取り入れていくことが有効である。相似であることを確認する操作的活動を行ったことで相似な図形を認識することができるようになり、相似な図形を予想し確認させる操作的活動を行ったことで、相似な図形に対する直観的な見方を深めることができたと考える。さらに、根拠を明らかにする活動を行ったことで、念頭操作で図形を想像する力を高め、相似な図形であることを示しやすくなり、相似な図形に対する直観的な見方がより深まり、相似な図形に対する直観が養われたと言える。

これらより、操作的活動と根拠を明らかにする活動と図形に対する直観は相互補完的に関係があり、操作的活動を随時取り入れながら根拠を明らかにする活動を行うことで、相似な図形に対する直観的な見方が深まり、相似な図形に対する直観を養うことができるということを明らかにすることができた。

VI 本研究における課題

本研究では、操作的活動に対応する角が等しいならば相似な図形であるということに限って行った。対応する辺についてどのように操作的活動を行っていけばよいのかを検討する必要がある。また、本研究は第3学年を対象に相似な図形について行ったが、第2学年の三角形の合同など、他学年の図形領域でも活用できることから、今後の指導に生かしたい。

<引用文献・URL>

- 1 文部科学省 2008 『中学校学習指導要領解説 数学編』, pp. 39-40
- 2 日本数学教育学会 1993 『新訂 算数教育指導用語辞典』, pp. 295-296, 教育出版
- 3 杉本悦郎 2009 「直観力・論理的な思考力を育成する指導の研究～中高一貫教育の特性を生かした図形の学習活動を通して～」『カリキュラム開発・研究 研究報告書』
<http://www.kyoiku-kensyu.metro.tokyo.jp/09seika/reports/files/kenkyusei/h16/k-10.pdf>
(2013. 1. 22)
- 4 川寄道広 2001 『全国数学教育学会誌 数学教育学研究 第7巻』, pp93-103

<参考文献・URL>

- 広島大学研究紀要Vol. 平成8年度 1997 「算数科における直観力の育成と評価に関する一考察—方法・結果を直観的に見通す場の構成を通して—」
<http://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/metadb/up/niikiyo/KJ00000708457.pdf> (2013. 1. 22)
- 文部科学省 2008 『小学校学習指導要領』