

中学校 数学

図形の論証指導において、  
筋道を立てて考える力を高めるための指導法の研究  
— 証明を読む活動を通して —

義務教育課 研究員 川下 美由樹

要 旨

本研究では、図形の論証指導において、筋道を立てて考える力を高めるために、証明を読んで成り立つ事柄の根拠を明らかにする活動や、過程に誤りのある証明を読んで誤りの箇所を指摘し修正する活動を取り入れた。その結果、自分や問題に合わせた思考を用いて証明を読み、成り立つ事柄や過程の誤りの根拠を明らかにするなど筋道を立てて考えることができるようになり、そのことが証明を記述することにもつながった。

キーワード：中学校 数学 論証指導 筋道を立てて考える 証明を読む

I 主題設定の理由

「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について」（中央教育審議会答申 平成20年1月）の中で、改善の基本方針の一つとして、「根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えることや、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実する」と示されている。つまり、「図形」の領域では、図形の性質や図形の中に成り立つ関係に対して見直しをもって考え、根拠を基にして筋道を立てて正しい推論ができるようにしていくことが求められている。

また、「平成24年度 学習状況調査実施報告書」（青森県教育委員会 2012）では、「理由を記述する問題での無解答や不十分な記述が多かったことから、論理的に考える力とともにその考えを適切に表現する力の育成」が課題として挙げられ、「根拠を明らかにしながら、自分の考えを適切に表現する活動を日々の授業に位置付けていくことが必要である」と示された。中学校学習指導要領解説数学編（平成20年9月）には、「図形による論証指導を通して、自分はもちろん他人をも納得させることができるよう筋道を立てて表現する能力を育成することが重要である」と示され、図形の論証指導は、論理的に筋道を立てて推論する力を高めるために重要な役割を果たすものであると言える。また、「推論の過程が異なる二つの証明を読んでその相違点を説明したり、推論の過程に誤りのある証明を読んでそれを指摘し改善したりするなど、証明を評価する活動を適宜取り入れることも考えられる」と、「証明を書くだけでなく証明を読むことも大切である」と示されていることから、証明を読むという活動を適宜取り入れることも必要であると捉えることができる。

以上のことを踏まえてこれまでの筆者の指導を振り返ってみると、証明の記述を正しくすることができることに重点を置いた指導が中心であった。平成23年度に行った筆者の長期研究（青森県総合学校教育センター）でも、仮定から結論を考えていく一般的な考え方の「総合的思考」と、結論から考えていく「分析的思考」の両方の思考を用いて証明の組立てを行い、それを基に記述の完成を目指すというように、証明の記述に関する研究であった。その結果、示すべき結論を証明の事柄として用いてしまうなど誤りに気付かず、証明を記述したことに満足し、記述した証明を読んで振り返ったり、証明をするために使った事柄や根拠が適切かどうかを判断したりする生徒はいなかった。

そこで本研究では、図形の論証指導において、筋道を立てて考える力を高めるための指導として証明を読む活動を取り入れることにした。具体的には、成り立つ事柄の根拠が明らかとなっていない不十分な証明を読んで成り立つ根拠を明らかにしたり、過程に誤りのある証明を読んで誤りの箇所を指摘してその誤りの根拠を明らかにしたり、ペアでお互いが記述した証明を読んだりする活動である。以上の活動を取り入れるこ

とが、筋道を立てて考える力を高めるために有効であると考え、本主題を設定した。

## II 研究目標

図形の論証指導において、成り立つ事柄の根拠が明らかとなっていない不十分な証明を読んで成り立つ根拠を明らかにしたり、過程に誤りのある証明を読んで誤りの箇所を指摘し、その誤りの根拠を明らかにしたり、ペアでお互いが記述した証明を読んだりする活動を取り入れることが、筋道を立てて考える力を高めるために有効であることを、実践を通して明らかにする。

## III 研究仮説

図形の論証指導において、成り立つ事柄の根拠が明らかとなっていない不十分な証明を読んで成り立つ根拠を明らかにしたり、過程に誤りのある証明を読んで誤りの箇所を指摘し、その誤りの根拠を明らかにしたり、ペアでお互いが記述した証明を読んだりする活動を取り入れることによって、筋道を立てて考える力を高めることができるであろう。

## IV 研究の実際とその考察

### 1 研究における基本的な考え方

#### (1) 「筋道を立てて考える」について

小学校学習指導要領解説算数編（平成20年8月）には、「問題解決の方法や結果が正しいことをきちんと示すためには、筋道を立てて考えることが求められる。それは、根拠を明らかにしながら、一歩ずつ進めていくという考えである」と示されている。つまり、筋道を立てて考えるとは、見通しを基に根拠を明らかにしながら自分の考えを整理し、順序立てて考えを進めることであると捉えることができる。

また、中学校学習指導要領解説数学編（平成20年9月）には、「図形の中に見いだせる関係の正しさや一般性を保証するため、推論の根拠とする事柄や推論に用いる用語の定義を明確にし、仮定と結論の意味を明らかにして、論理的に筋道を立てて正しい推論ができるようにする」と示されている。つまり、数学的な推論に基づく論理的な見方や考え方の重要性と、数学的な推論の必要性について述べられており、論証指導は、論理的に筋道を立てて推論する力を高めるために重要な役割を果たすものと捉えることができる。数学的な推論の主なものとしては帰納、類推、演繹があり、以下のように示されている。

- 帰納・・・「特別な場合についての観察、操作や実験などの活動に基づいて、それらを含んだより一般的な結果を導き出す推論」
- 類推・・・「似たような条件のもとでは、似たような結果が成り立つであろうと考えて、新しい命題を予想する推論」
- 演繹・・・「前提となる命題から論理の規則に従って必然的な結論を導き出す推論」

帰納的に考えることや類推的に考えることにより、図形の性質や関係を見いだすことは小学校算数で中心的に取り上げられている。また、演繹的に考えることによって筋道を立てて説明することも学習している。中学校の「図形」の領域では、図形の性質や図形の中に成り立つ関係がいつでも正しいということを証明するために、すでに分かっていることを基にして、その正しいことを説明しようとする演繹的な考え方が中心となる。

そこで、合同の証明において、演繹的に考えるときに「総合的思考」と「分析的思考」の両方を用いることで、証明に必要な事柄と根拠を見付け、それを整理して考えることが筋道を立てて考える力を高めることにつながると考えた。

#### (2) 「総合的思考」と「分析的思考」について

片桐（2004）は、演繹的に考えるときに用いられる総合的思考と分析的思考について、

- 総合的思考・・・「分かっていることを基に、『それからどんなことが言えるか』と仮定から結論を考えていく」
- 分析的思考・・・「『そのことが言えるには、何が言えればよいのか』というように結論から仮定を考えていく」

と示している。

この二つの思考が、三角形の合同の証明にどのように用いられるかを図1に示す。

まず、総合的思考は、すでに等しいと分かっている仮定とそれ以外に成り立つ事柄（等しい辺又は角等）を見付けることから始まる。それによって成り立つ合同条件が決まり、二つの三角形が合同であることが示され、結論が導かれていくという考え方である。すなわち、与えられた仮定と成り立つ事柄から三角形の合同を証明し、結論を導くという方法である。

次に、分析的思考は、結論を導くために、結論を含む合同と予想する二つの三角形について考えることから始まる。そして、その二つの三角形の辺又は角に対して成り立つ事柄（仮定を含む）を見付け、その見付けた事柄によって合同条件が決まり、二つの三角形が合同であることが示され、結論が導かれるという考え方である。すなわち、結論を示すためには、どの三角形の合同を証明すれば良いのかを考える方法である。図形の論証指導において、仮定から結論と結論から仮定の両方向から考えることが有効であると考えた。

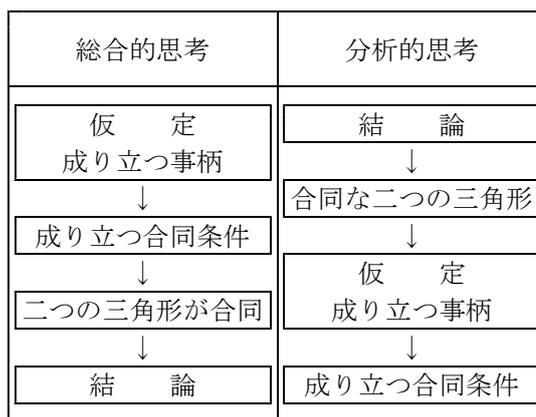


図1 総合的思考と分析的思考のイメージ図

### (3) 証明を読む活動について

国立教育政策研究所教育課程研究センターから出された「全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～中学校編（平成24年9月）」に、「図形の証明が正しくできるようになることを主眼に置いているが、その狙いを達成させるためにも証明を読んで、合同条件や合同条件で用いられている相等関係などを確認した上で、証明を発展的に考える活動を重視していく必要がある」と示されているように、証明を記述させるだけでなく、証明を読むことも重要であると述べている。しかし、実際の指導では、穴埋め問題を用いて形式的に証明の書き方を覚え込ませるなど証明の記述に重点が置かれ、証明が記述できるようになることのみを目標としてきた指導が多かった。また、教科書の指導内容も証明を記述させる内容が中心であるため、証明を読む活動は少なく、証明を振り返り評価・改善させる活動は不十分であった。そこで、証明を読む活動を次のように取り入れることとする。

- ① 成り立つ事柄の根拠が明らかとなっていない不十分な教師の証明を、「総合的思考」と「分析的思考」を用いて読み、成り立つ根拠を明らかにする活動
- ② 推論の過程に誤りのある教師の証明を、「総合的思考」と「分析的思考」を用いて読み、誤りの箇所を指摘し、修正する活動
- ③ 「総合的思考」と「分析的思考」を用いて証明を記述し、その後、ペアでお互いが記述した証明を「総合的思考」と「分析的思考」を用いて読み、上記①と②を生かす活動

## 2 研究内容

### (1) 各教科書の「平行と合同」の単元における「証明を読んで根拠を明らかにする」と「証明を読んで誤りを指摘し修正する」ことの取り扱いに関する調査

中学校学習指導要領解説数学編（平成20年9月）には「推論の過程が異なる二つの証明を読んでその相違点を説明したり、推論の過程に誤りのある証明を読んでそれを指摘し改善したりするなど、証明を評価する活動を適宜取り入れることも考えられる」と示されている。また、「全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～中学校編（平成24年9月）」には、「結論を導くために用いられている条件や根拠に着目しながら証明を読み、そのしくみを捉えることが大切である」と示されている。つまり、証明を読んで推論の過程が成り立つ事柄の根拠を明らかにしたり、推論の過程が異なる証明の相違点を指摘し改善したりする活動がより一層重視されている。そこで、各教科書会社の「平行と合同」の単元における「証明を読んで根拠を明らかにする」と「証明を読んで誤りを指摘し修正する」内容をどのくらい取り扱っているかについて調査をした。その結果、前者の内容は2社が、後者の内容は3社が取り扱っていることが分かり、どちらの内容に関しても、教科書で取り扱っているのは7社のうちの半数にも満たない状況であり、しかも、取り扱っている教科書の多くは、学習した内容を確認するためである。このことから、教科書の指導内容とし

ては、証明の記述を意識した内容を多く取り扱っていることが分かる。

また、証明に初めて取り組む生徒にとって、「〇〇を証明しなさい」というように記述を求める形で問題を与えるよりも、証明の記述を指導する前に「次の証明のどこが間違っているのだろうか」とか「なぜ間違っているのだろうか」という形で問題を与える方が、生徒の主体性を高めることにもつながるのではないかと考えた。

(2) 証明を読んで成り立つ根拠を明らかにしたり、過程の誤りを指摘し修正したりする活動を取り入れた単元構成の工夫について

「平成19年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書」(国立教育政策研究所 平成20年1月)には「証明の学習において、不十分な証明や誤った証明を基に、証明の不十分なところや誤りを指摘し、よりよい記述や正しい表現の仕方について考え、証明を改める活動を充実させることが大切である」と記載されている。第2学年で図形の論証を学習するまでは、第1学年で文字を用いた式で表し、それを基に第2学年で数の性質について成り立つことを、文字を用いて演繹的に説明することを学習する。しかし、この単元においても、図形の論証指導と同様に「〇〇を説明しなさい」というような記述を求める例題や問題が多い。そこで、研究協力校の生徒の実態を把握するために、この単元において、「説明の誤りの箇所と根拠を指摘する」と「文字を用いて数量の関係を説明する」というように、どのくらい説明を読んだり記述したりすることができるかという内容で、第2学年の16名を対象に事前調査を行ったところ、表1の結果となった。問題②に対する誤答は6名いたが、この6名に共通することは、二種類の文字を用いて説明しなければならないのに一種類の文字で説明したことである。また、どちらの問題に対しても、半数以上の生徒が無解答であったなど、演繹的に考えたり説明したりすることに課題があることが分かった。そして、第2学年の学習で演繹的に説明や証明する内容が増える中、

表1 実態把握のための事前調査の結果

	正答	誤答	無解答
① 説明の誤りの箇所と根拠を指摘する	2名	3名	11名
② 文字を用いて数量の関係を説明する	2名	6名	8名

(平成26年6月実施 対象：第2学年 16名)

説明や証明の記述に重点が置かれた指導が中心であり、説明や証明を読むという活動が不十分であることから、本研究における単元構成を次のように工夫した。

ア 第1時：記述の順序と同じ「総合的思考」を用いて証明を読み、成り立つ根拠を明らかにする。

第1時では、成り立つ根拠が明らかとなっていない不十分な証明を、まずは仮定や等しい辺、角に着目させることから始める。そして、三角形の合同条件、結論の順に考える総合的思考を用いて読んで成り立つ根拠を明らかにすることを指導する。その理由として、総合的思考の考えの順序が証明の記述の順序と同じであることと、不十分な証明でも示された順序に読んでいく方が生徒は受け入れやすいと考えたためである。ただし、この時間では、証明の記述は行わないことにする。具体的な展開例は図2に示す。

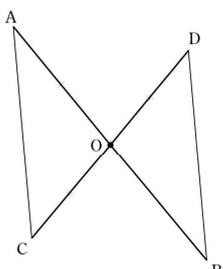
<p>AO = BO, CO = DOならば AC = BDであることの証明</p> <p>△OACと△OBDにおいて、</p> <p>AO = BO …①</p> <p>CO = DO …②</p> <p>∠AOC = ∠BOD …③</p> <p>△OAC ≅ △OBD …④</p> <p>AC = BD …⑤</p>		<p>①・②が成り立つ根拠はなぜですか。</p> <p>↓</p> <p>③が成り立つ根拠はなぜですか。</p> <p>↓</p> <p>④が成り立つ根拠はなぜですか。</p> <p>↓</p> <p>⑤が成り立つ根拠はなぜですか。</p>
--	---	--

図2 「総合的思考」を用いて証明を読み、成り立つ根拠を明らかにする展開例

イ 第2時：見通しをもてる「分析的思考」を用いて証明を読み、成り立つ根拠を明らかにする。

第2時では、成り立つ根拠が明らかとなっていない不十分な証明を、まずは結論に着目させることから始める。そして、なぜその二つの三角形の合同を示せば良いのかを考えさせ、次にその二つの三角形の辺や角の順に考えさせる方法、すなわち分析的思考を用いて成り立つ根拠を明らかにすることを指導する。分析的思考では記述してある証明を逆から読むことになるので、証明を記述させる際には、矢印などを用いて思考の流れが分かるような配慮が必要となる。ただし、この時間も第1時と同様に、証明

の記述は行わないものとする。具体的な展開例は図3に示す。

<p>OA=OB, AP=BPならば, ∠AOP=∠BOPであることの 証明</p> <p>△AOPと△BOPにおいて, OA=OB …① AP=BP …② OP=OP …③ △AOP≡△BOP …④ ∠AOP=∠BOP …⑤</p>		<p>⑤が成り立つ根拠はなぜですか。 ↓ ④の三角形に着目するのはなぜですか。 ↓ ①・②・③が成り立つ根拠はなぜですか。 ↓ ④が成り立つ根拠はなぜですか。</p>
---	--	---

図3 「分析的思考」を用いて証明を読み、成り立つ根拠を明らかにする展開例

ウ 第3時：過程に誤りのある証明を読み、誤りの箇所を指摘し修正する。

第3時では、過程に誤りのある証明を自分や問題に合った思考を用いて読み、誤りの箇所を指摘しその根拠を明らかにしたり修正したりさせることにする。その際、過去に全国学力・学習状況調査問題として出題された問題を用いて正答率や無解答率の比較をしたり、二通りの思考のどちらを用いて証明を読んでいるのかを検証したりすることにする。具体的な展開例は図4に示す。

<p>平行な2直線 <math>l, m</math> 上に <math>AC=BD</math> となる線分をとり、点AとB, 点CとDをそれぞれ結ぶ。線分ABと線分CDの交点をOとする。</p> <p>△AOCと△BODにおいて, 仮定から AC=BD …① 対頂角の関係から ∠AOC=∠BOD …② 平行線の錯角の関係から ∠OAC=∠OBD …③ ①, ②, ③より1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから △AOC≡△BOD 合同な三角形の対応する辺だから AO=BO</p>		<p>AO=BOとなることを証明しましたが、この証明には間違いがあります。</p> <p>1. 間違いの箇所を指摘しましょう。 ↓ 2. その間違いの根拠を答えましょう。 ↓ 3. この証明を正しく書き直しましょう。</p>
---	--	--

図4 過程に誤りのある証明を読み、誤りの箇所を指摘し修正する展開例

エ 第4時, 第5時：問題や自分に合った思考を用いて証明を記述する。

第1時から第3時までは証明を読む活動が中心であったが、第4時と第5時では問題や自分に合った思考を用いて証明を記述させることにする。ここでも第3時と同様に、過去の全国学力・学習状況調査問題に出題された問題を用いて正答率や無解答率の比較をしたり、「総合的思考」と「分析的思考」の二通りの思考のどちらを用いて記述するのかを検証したりすることにする。また、記述した証明をペアで交換して証明を読む活動を取り入れ、誤りがある場合にはそれを指摘し、修正することができるかどうかについても検証する。その際、どちらの思考を用いて証明を読むのかについても検証することにする。

### 3 検証方法

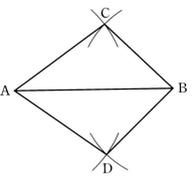
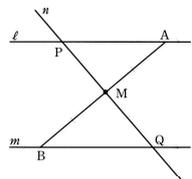
- (1) 成り立つ根拠が明らかとなっていない不十分な証明を読んで成り立つ根拠を明らかにする問題に対するワークシートの記述内容の分析
- (2) 過程に誤りのある証明を読んで誤りの箇所を指摘し、その誤りの根拠を明らかにすることと修正することに対するワークシートの記述内容の分析

(3) 証明の記述に対する調査とペアでお互いの証明を読む活動に対するワークシートの記述内容の分析

#### 4 検証授業の実際

##### (1) 検証に用いた問題と思考及び活動について

ア 第1時, 第2時: 成り立つ根拠が明らかとなっていない不十分な証明を読んで成り立つ根拠を明らかにする活動

第1時 検証問題	第2時 検証問題
<p><math>AC=AD</math>, <math>BC=BD</math>ならば  <math>\angle ACB=\angle ADB</math>であること                      の証明</p> <p><math>\triangle ABC</math>と<math>\triangle ABD</math>において</p> <p><math>AC=AD</math> …①  <math>BC=BD</math> …②  <math>AB=AB</math> …③  <math>\triangle ABC\equiv\triangle ABD</math> …④  <math>\angle ACB=\angle ADB</math> …⑤</p> 	<p><math>AM=BM</math>ならば<math>PM=QM</math>であることの証明</p>  <p><math>\triangle PAM</math>と<math>\triangle QBM</math>において</p> <p><math>AM=BM</math> …①  <math>\angle AMP=\angle BMQ</math> …②  <math>\angle MAP=\angle MBQ</math> …③  <math>\triangle PAM\equiv\triangle QBM</math> …④  <math>PM=QM</math> …⑤</p>

イ 第3時: 過程に誤りのある証明を読んで誤りの箇所を指摘し, その誤りの根拠を明らかにすることと修正する活動

☆平成19年度 全国学力・学習状況調査問題

下の図のように, 線分 $AB$ の垂直二等分線 $l$ をひいて, 線分 $AB$ との交点を $M$ とします。

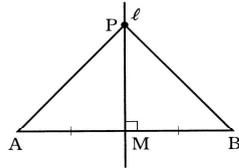
$\triangle PAM$ と $\triangle PBM$ において,  
 仮定から

$AM=BM$  …①  
 $PA=PB$  …②  
 共通な辺だから  
 $PM=PM$  …③

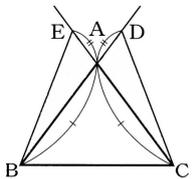
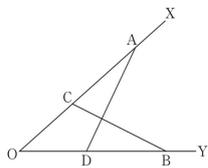
①, ②, ③より  
 3組の辺がそれぞれ等しいから  
 $\triangle PAM\equiv\triangle PBM$   
 合同な三角形の対応する辺だから  
 $PA=PB$

このとき,  $PA=PB$ となることを証明しましたが, この証明には間違いがあります。

1. 間違いの箇所を指摘しましょう。  
 ※全国正答率 59.5%  
 ※全国無解答率 22.6%
2. その間違いの根拠を答えましょう。
3. この証明を正しく書き直しましょう。  
 ※全国正答率 49.0%  
 ※全国無解答率 16.7%



ウ 第4時, 第5時: 問題や自分に合った思考を用いて証明を記述する活動

第4時 検証問題	第5時 検証問題
<p>☆平成22年度 全国学力・学習状況調査問題</p> <p>右の図で, <math>AB=AC</math>の二等辺三角形<math>ABC</math>の辺<math>AB</math>, 辺<math>AC</math>上に<math>AD=AE</math>となる点<math>D</math>, <math>E</math>をそれぞれとる。                      このとき, <math>BE=CD</math>となることを証明しましょう。</p> <p>※全国正答率 48.2%                      ※全国無解答率 21.9%</p> 	<p>☆平成20年度 全国学力・学習状況調査問題</p> <p>右の図のように, <math>\angle XOY</math>の辺<math>OX</math>と辺<math>OY</math>上に, <math>OA=OB</math>となるように点<math>A</math>と点<math>B</math>を, <math>OC=OD</math>となるように点<math>C</math>と点<math>D</math>を, それぞれとります。                      点<math>A</math>と点<math>D</math>, 点<math>B</math>と点<math>C</math>をそれぞれ結ぶとき, <math>AD=BC</math>となることを証明しましょう。</p> <p>※全国正答率 44.2%                      ※全国無解答率 27.8%</p> 

##### (2) 検証問題における検証結果

ア 成り立つ根拠が明らかとなっていない不十分な証明を読んで成り立つ根拠を明らかにすることに対する調査

第1時では総合的思考を, 第2時では分析的思考のそれぞれの思考を用いて証明を読み, 成り立つ根拠が明らかとなっていない不十分な証明に対して, 上記の①~⑤が成り立つ根拠, すなわち, 「等しい

辺や角が成り立つ根拠」，「三角形の合同が成り立つ根拠（三角形の合同条件）」，「結論が成り立つ根拠」を明らかにすることができるかというそれぞれの項目について検証を行った。その結果を表2に示す。

第1時の例題を用いて「仮定」と「結論」という図形の合同の証明を学習する上で大切な用語を確認したが、結論が成り立つ根拠を確認した際に、「合同な図形では対応する辺の長さや角の大きさは等しい」と強調したところ、検証問題の等しい辺が成り立つ根拠に対しても「対応する辺だから」と記述してしまった生徒が3名いた。数学的な用語を適切に用いることはとても大切であるため、第2時の例題を用いて分析的思考を確認する段階においても、改めて「仮定」と「結論」の意味と「対応する辺や角」について確認した。すると、第2時の検証問題では全員が正しく記述できていた。また、三角形の合同が成り立つ根拠（三角形の合同条件）については、「3組の辺がそれぞれ等しい」を「3つの辺がそれぞれ等しい」と誤って覚えていた生徒が2名おり、三角形の合同条件においても同様に確認した。この検証問題における不正解の生徒は7名であったが、そのうちの2名が無解答であった。

第2時の検証問題では、二つの三角形に成り立つ等しい辺や角といった事柄が四つある問題を意図的に取り上げた。このような問題では、初めから合同な関係を証明する二つの三角形を生徒自身が確認しながら進める方がいずれ証明の記述をする上でも大切であり、分析的思考を用いる方が有効であると考えたからである。この検証問題における不正解の

生徒は4名であったが、そのうちの2名の生徒が「対頂角だから」という根拠を「仮定から」と記述していた。その理由として、それまで扱ってきた全ての問題が「仮定から」という根拠が二つあったためと考えられる。また、無解答であった生徒は、この問題においても2名であった。

表2 不十分な証明の成り立つ根拠を明らかにする

	正解	不正解
第1時：総合的思考を用いて読む	9名	7名
第2時：分析的思考を用いて読む	12名	4名

イ 過程に誤りのある証明を読んで誤りの箇所を指摘し、修正することに対する調査

第3時では、平成19年度の全国学力・学習状況調査に実際に出題された問題を用いて検証を行い、全国の正答率及び無解答率と比較した。その結果は表3に示したとおりであり、誤りの箇所を指摘できた生徒は12名、正しい証明に修正することができた生徒は11名であった。

表3 全国学力・学習状況調査問題との比較 I

	研究協力校		全国	
	正答率	無解答率	正答率	無解答率
誤りの箇所を指摘する	75.0%	12.5%	59.5%	22.6%
正しい証明を記述する	68.8%	12.5%	49.0%	16.7%

これは、第1時と第2時において、成り立つ根拠が明らかとなっていない不十分な証明を読んで成り立つ根拠を明らかにする活動を通して、証明を読むことに慣れたことが要因であると考えられる。次に、図5は生徒Aが記述した内容である。大部分の生徒は仮定と結論をしっかりと区別することができ、事柄②の誤りを指摘することができたが、この生徒Aは、事柄②の誤りに併せて三角形の合同条件にも誤りがあることを記述してある。これに対して、誤りの箇所を指摘することと誤りを修正することができなかった生徒はそれぞれ4名と5名おり、そのうち、無解答だった生徒はどちらの問題も2名であった。

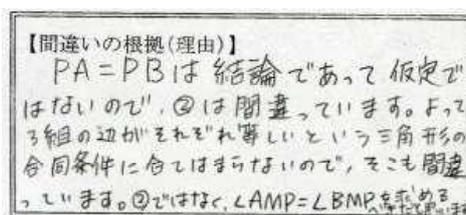


図5 生徒Aが記述した内容

ウ 証明を記述することに対する調査

第4時と第5時では、平成22年度と平成20年度の全国学力・学習状況調査に実際に出題された問題を用いて証明の記述に関する検証を行い、第3時と同様に全国の正答率及び無解答率と比較した。第4時の検証問題である平成22年度に出題された問題は、本来、 $\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ に網かけがされて出題されているが、それでは初めから二つの三角形が与えられているため、結論（二つの三角形）から考える分析的思考を用いる傾向が強まると考え、網かけを消した図を用いることにした。

前述にもあるように、第3時までは証明を読む活動が中心であった。また、第3時の学習内容のように、証明の誤りの箇所を修正する活動を通して証明を記述することは経験しているが、これは、すでに示されている証明と照らし合わせながら記述をするため、全くの白紙状態で証明を記述する活動は第4時が初めてとなる。それぞれの結果を表4に示してあるが、第4時の検証問題において証明を記述する

ことができた生徒は16名中8名、第5時の検証問題においては16名中9名であり全国の正答率を若干上回った。また、不正解だった生徒の解答を見ると、全く記述していない生徒は0名であり、全国の無解答率と比較しても良い傾向であると判断できるとともに、第3時と比較しても改善された。検証授業後のアンケートに、「説明や証明することは難しいと感じていたが、証明を読む活動を通してその思いは減ってきた」とか「証明を読むことが証明を記述することに役に立った」という感想があるように、生徒には証明を読む活動が、証明を記述する活動に役に立ったと感じたことが分かった。図6は、生徒Bが第5時の検証問題で記述した証明とその考え方である。この生徒Bは、実態把握のために行った事前調査や第3時の検証問題において全く記述することができなかった生徒である。しかし、分析的思考を用いて「この二つの三角形に着目すれば良い」と考えながら正しい証明を何度も読んでいるうちに、証明に必要な事柄（等しい辺や角）を見付けることができ、図に示したとおり証明の記述も完成させることができた。

表4 全国学力・学習状況調査問題との比較Ⅱ

	研究協力校		全国	
	正答率	無解答率	正答率	無解答率
第4時	50.0%	0%	48.2%	21.9%
第5時	56.3%	0%	44.2%	27.8%

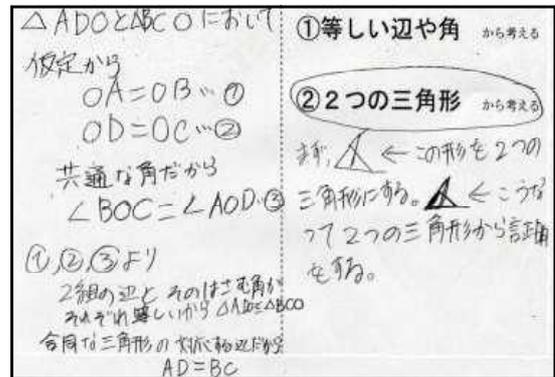


図6 生徒Bが記述した証明と考え方

エ ペアでお互いの記述した証明を読む活動に対する記述内容の変容

第4時と第5時では、記述した証明をペアで交換し、相手が記述した証明をどちらかの思考を用いて読む活動も取り入れた。第4時の検証問題に対して生徒Cが記述した内容を図7と図8に示す。生徒Cは、まず図7の内容で証明を記述したが、相手が記述した証明を読んだ際に、相手が証明した二つの三角形と自分が証明した二つの三角形とが異なることに気が付き、証明を読み終えた後、自分とは異なる二つの三角形を用いた証明の記述に挑戦し、図8のように結論まで導くことができた。また、相手が記述した証明を、初めは総合的思考を用いて仮定（等しい辺や角）から順に読んでいた生徒は、途中で相手が証明した二つの三角形と自分が証明した二つの三角形とが異なることに気が付き、分析的思考を用いて結論（二つの三角形）から読み直していった。そして、自分が証明した二つの三角形とは異なる三角形でも証明することができることを理解した。このように、相手が記述した証明を読むことで、自分が思い付かなかった証明に気付くことにもつながった。

次に、ペアでお互いの記述した証明を読み、誤りの箇所を指摘することができた数を表5にまとめた。ただし、どちらも正解の場合は誤りを指摘できないので、表に示すように計測しないことにした。どちらかが正解したペアのうち、第4時では4名、第5時では3名が、ペアの相手が記述した証明の誤りを指摘することができた。しかし、正しい証明を記述したにも関わらず、相手の誤りを指摘することができなかった生徒もいた。これは、第3時の内容のように、間違っていることがすでに分かっている証明を読んで間違いの箇所を指摘したり修正したりすることには自信をもてるが、相手が記述した証明に誤りがあるか分からない場合に対しては、自信をもって指摘することができなかったと考えられる。

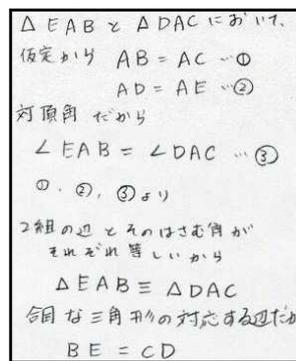


図7 生徒Cが最初に記述した証明

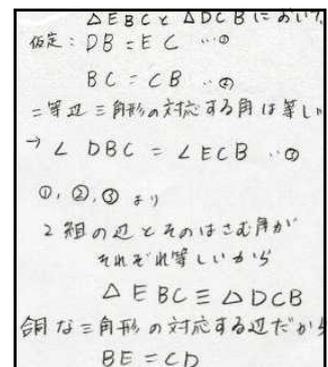


図8 相手の証明を読んだ後に生徒Cが記述した証明

表5 ペアでお互いの証明を読み、誤りを指摘できた人数

	第4時		第5時	
	ペア数	誤り指摘	ペア数	誤り指摘
どちらも正解	1ペア	0名	2ペア	0名
どちらかが正解	6ペア	4名	5ペア	3名
どちらも不正解	1ペア	1名	1ペア	0名

オ 「総合的思考」と「分析的思考」の二つの思考に対する調査

第4時と第5時では、証明を記述する際とペアで証明を読む活動に対して、どちらの思考を用いたかについても調査し、結果を表6にまとめた。第4時の検証問題では、証明を記述する活動とペアで証明を読む活動に対して総合的思考を用いる生徒が多かったが、第5時の検証問題では逆に分析的思考を用いる生徒が多かった。生徒の感想に、「仮定から考えたり結論から考えたりする活動を通して、一つの図形でも様々な見方をすることができることが分かりとても参考になった」とあるように、問題に合わせて二つの思考を使い分けていたことが分かった。しかし、第2時の分析的思考を用いて証明を読む活動では、不十分な証明とはいえ、すでに記述されている証明を逆から読むことに抵抗を抱いた生徒が多く、そのことが、第4時で初めて取り組んだ証明を記述する活動にも影響を与え、仮定から考える総合的思考を用いた割合が高くなったと考えられる。また、表6の数値だけを見ると、第4時と第5時の検証問題に対して、自分で証明を記述するために用いた思考と、相手が記述した証明を読むための思考の人数が同じであるが、実際は、「どちらの思考も使うことができるようにしたい」という理由から、自分で証明を記述するために用いた思考と、相手が記述した証明を読むための思考をあえて逆にしていた生徒が4名いた。以上のことから、二つの思考を用いることが有効であったと言える。

表6 総合的思考と分析的思考に関する調査

	証明を記述する		相手の証明を読む	
	総合的思考	分析的思考	総合的思考	分析的思考
第4時	14名	2名	14名	2名
第5時	5名	11名	5名	11名

(3) 証明を読む活動に対する意識調査とワークシートの変容

図形の証明を学習するまでは、数の性質について成り立つことを、文字を用いて演繹的に説明することを学習している。その単元では、前述にもあるように証明(説明)の記述に重点が置かれた指導が中心であり、証明(説明)を読むという活動が不十分であることから、証明を読むという活動を位置付けて本研究を進めてきた。そこで、研究対象生徒16名に対して、検証授業後に証明を読む活動に対する意識調査を実施したところ表7に示した結果となり、16名全員が役に立ったと感じたことが分かった。しかし、証明を読む活動に対して「どちらかと言えば役に立った」と回答した生徒の中には、「証明を読んで成り立つ根拠を明らかにしたり、誤りを見付けたりすることはできたが、証明を記述することは難しかった」という感想を述べた生徒もいた。このように、相手に伝わるように説明することを苦手と感じている生徒の割合はまだ高く、自分の考えを相手に説明することに課題のあることが分かった。次に、事前調査問題では無解答であった生徒Dが、第4時の検証問題に対して記述した証明の内容を図9に示す。結論を成り立つ事柄として用いているため、証明の記述としては不正解であるが、等しい事柄を三つ見付け、三角形の合同を示し、最後に結論を導くという証明の筋道は理解することができた。また、事前調査問題では、図10に示すように、一種類の文字を用いて誤った説明をしていた生徒Eが、第5時の検証問題に対しては、図11のように正しい証明を記述することができた。

表7 証明を読む活動に対する意識調査

役に立った	5名
どちらかと言えば役に立った	11名
あまり役に立たなかった	0名
役に立たなかった	0名

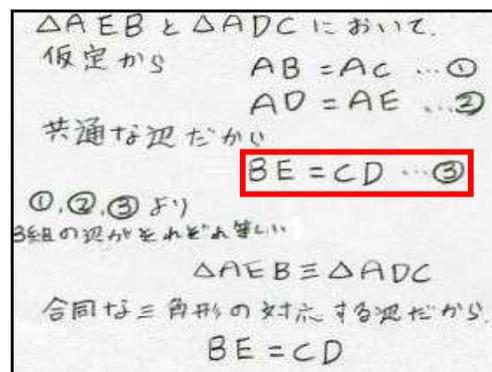


図9 生徒Dが第4時で記述した証明 (色囲は筆者による加筆)

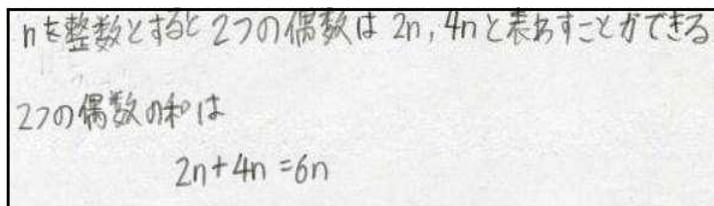


図10 生徒Eが事前調査で記述した説明

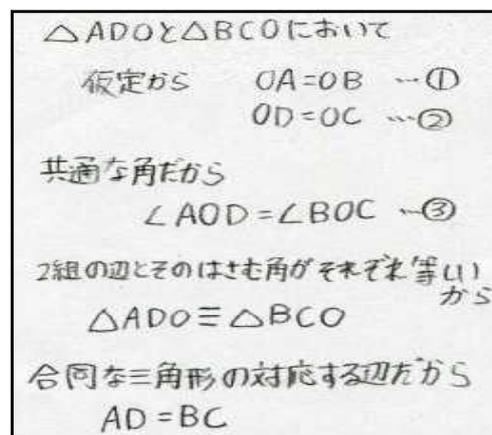


図11 生徒Eが第5時で記述した証明

## V 研究のまとめ

### 1 証明を読む活動を取り入れたこと

- ・証明の記述の仕方を学習する前に、事柄の根拠が不十分な証明を読んで成り立つ根拠を明らかにする活動を取り入れたことで、証明の学習に対する苦手意識が減少した生徒や、証明の記述に役に立ったと感じた生徒が多かった。そのことで、証明を記述する問題に対して無解答者がいなくなった。
- ・過程に誤りのある証明を読んで誤りの箇所を指摘したり修正したりする活動では、証明を読むことに慣れ、誤りの箇所を適切に指摘し正しい証明に修正することができた。
- ・ペアの相手が記述した証明を読むことで、自分では気付かなかった二つの三角形を用いても証明することができることを知ることに繋がった。さらに、自分が証明した過程とは異なる証明に挑戦し、証明を完成させることができた生徒もいた。

### 2 「総合的思考」と「分析的思考」の二通りの思考を用いたこと

- ・二通りの思考を用いて証明を読む活動を設定したことで、問題によって仮定から読んだり、結論から読んだりすることを使い分けできるようになった。また、自分が証明を記述したときに用いた思考と逆の思考を用いることで、ペアの相手が記述した証明を読む際に、多様な見方を育成することにつながるようになった。

## VI 本研究における課題

- ・証明を読む活動は役に立ったと感じた生徒は多かったが、証明を記述することはやはり難しいと感じた生徒がいた。
- ・証明の過程に誤りのあることが分かっている証明に対しては、誤りの箇所を指摘したり修正したりすることはできるが、証明の過程に誤りがあるかどうか分からない証明に対しては、自信をもって指摘したり修正したりすることができなかつた生徒がいた。
- ・すでに記述してある証明を、「分析的思考」を用いて逆から読むことに抵抗感を抱く生徒がいた。

### <引用文献・URL >

- 1 中央教育審議会 2008 「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（答申）」  
[http://www.mext.go.jp/b\\_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/\\_icsFiles/afieldfile/2009/05/12/1216828\\_1.pdf](http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/_icsFiles/afieldfile/2009/05/12/1216828_1.pdf) (2015. 1. 5)
- 2 青森県教育委員会 2012 『平成24年度 学習状況調査実施報告書』, p. 68
- 3 文部科学省 2008 『中学校学習指導要領解説 数学編（平成20年9月）』, p. 41, 教育出版
- 4 上掲3, p. 95
- 5 上掲3, p. 97
- 6 文部科学省 2008 『小学校学習指導要領解説 算数編（平成20年8月）』, p. 20, 東洋館出版社
- 7 上掲3, p. 23
- 8 上掲3, p. 29
- 9 片桐重男 2004 『新版 数学的な考え方とその指導 第1巻 数学的な考え方の具体化と指導』, p. 48, 明治図書
- 10 国立教育政策研究所教育課程研究センター 2012 『全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～中学校編』, p. 43, 教育出版
- 11 上掲10, p. 134
- 12 国立教育政策研究所 2007 『平成19年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』, p. 212

### <参考文献・URL >

- 川下美由樹 2012 「図形の論証指導において、筋道を立てて考える能力の育成を目指した指導法の研究－合同の証明における「総合的思考」と「分析的思考」の両方の指導を通して－」『青森県総合学校教

育センター 研究報告2011』

[http://www.edu-c.pref.aomori.jp/kenkyu/2011/reports\\_data/d\\_ck09.pdf](http://www.edu-c.pref.aomori.jp/kenkyu/2011/reports_data/d_ck09.pdf) (2015.1.5)

国立教育政策研究所 2010 『平成22年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』

国立教育政策研究所 2008 『平成20年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』

国立教育政策研究所 2007 『平成19年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』